



UNIVERSIDAD DE CIENCIAS Y ARTES DE CHIAPAS

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

TESIS

OPTIMIZACIÓN DE UN FLUJO OSCILATORIO MHD BASADA EN LA PRODUCCIÓN DE ENTROPÍA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN MATERIALES Y
SISTEMAS ENERGÉTICOS
RENOVABLES

PRESENTA

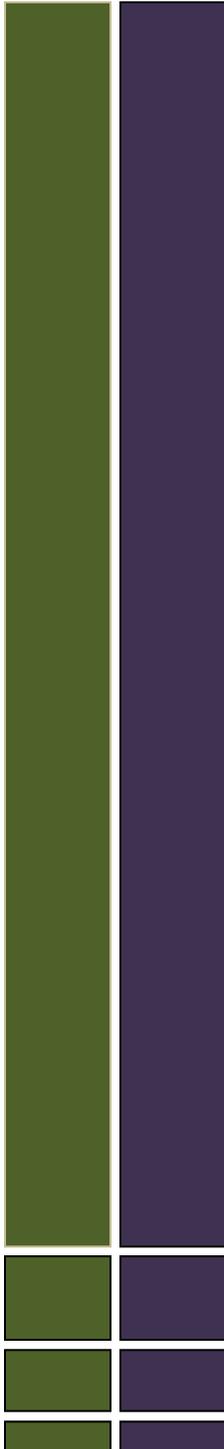
IGNACIO DE JESÚS GÓMEZ ROSALES

DIRECTOR

DR. GUILLERMO IBAÑEZ DUHARTE

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS.

Junio 2015.



Agradecimientos

Principalmente a mi director de tesis Dr. Guillermo Ibáñez de quien en todo momento tuve su apoyo incondicional para la obtención de los resultados, la difusión de la investigación y la escritura de la tesis; y a los investigadores del CIDTER que contribuyeron en el mejoramiento del trabajo.

Al programa de Beca CONACYT por el apoyo económico durante el ciclo escolar y al proyecto CONACYT-AECID “Uso integral de las fuentes renovables de energía en comunidades de alta marginación en Chiapas” por el apoyo en el financiamiento para la difusión y presentación de los resultados de este trabajo.

A la UNICACH por la prestación de sus instalaciones y por el apoyo económico para la presentación de resultados de la investigación.

Al grupo de trabajo de optimización de sistemas energéticos, Aracely López, Imer López, Ignacio Zenteno y Javier Rodríguez, que durante el transcurso de la investigación contribuyeron en la obtención de resultados de la investigación.

Contenido

Resumen	5
Nomenclatura	6
Introducción	8
1 Marco Teórico	13
1.1 Termodinámica de procesos irreversibles lineal....	13
1.2 Balance de entropía.....	15
1.3 Ecuaciones de balance.....	18
1.3.1 Balance de masa.....	19
1.3.2 Conservación de momento lineal.....	20
1.3.3 Balance de energía.....	22
1.4 Producción de entropía.....	24
1.5 Ecuaciones del campo electromagnético.....	26
1.6 Magnetohidrodinámica (MHD).....	27
2 Modelo Matemático	30
2.1 Introducción.....	30
2.2 Ecuaciones Fundamentales.....	31
2.3 Descripción del Sistema.....	32
2.4 Campo de Velocidad.....	34
2.5 Campo de Temperatura.....	39
2.6 Intensidad de Campo Eléctrico.....	44
2.7 Generación de Entropía Local y Global.....	45

3	Análisis de Resultados	51
3.1	Introducción.....	51
3.2	Comportamiento Dinámico.....	51
3.3	Comportamiento Térmico.....	61
3.4	Producción de Entropía.....	76
4	Conclusiones	89
	Referencias	92
	Anexos	96

RESUMEN

Se describen las bases matemáticas para la comprensión del modelo de un sistema compuesto por un flujo oscilatorio magnetohidrodinámico (MHD) entre dos planos paralelos considerando los efectos del deslizamiento en los planos. Se construyen y resuelven las ecuaciones de balance de masa, momento, energía y entropía acopladas con las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo conocidas también como ecuaciones de la MHD. A partir de los fundamentos teóricos se realiza una descripción detallada del modelo matemático del sistema magnetohidrodinámico.

La ecuación de balance de momento se resuelve con condiciones de frontera de deslizamiento y la de balance de energía con condiciones de frontera de tercer tipo. Una vez obtenidos los campos de velocidad y temperatura del fluido MHD se llega a una expresión explícita para la producción local de entropía en función de estos campos de velocidad y temperatura y de sus gradientes. Esta última cantidad es integrada en el tiempo y en todo el volumen del sistema para obtener la producción global de entropía en función de los parámetros tanto físicos como geométricos que caracterizan dicho sistema. Finalmente, esta cantidad se optimiza para obtener condiciones de operación donde las pérdidas de energía útil son mínimas.

Los resultados muestran que el deslizamiento es un parámetro que influye significativamente en los perfiles de velocidades. También se analiza el efecto que tiene la frecuencia de oscilación del fluido y la intensidad del campo magnético sobre el perfil de velocidad. El mismo análisis se efectúa para el comportamiento térmico y se obtiene que el deslizamiento influye en la transferencia de calor. Además, se muestran gráficas de la producción de entropía local y global del sistema, en las cuales se observan los efectos de cada parámetro que caracteriza al flujo. Por último, se encontraron mínimos de producción de entropía local, así como de entropía global y por tanto, condiciones óptimas de operación.

Nomenclatura

a	distancia medida desde el centro del canal a cada pared [m]
A	área [m ²]
B	inducción magnética [T] [kg/s ² A]
B_0	intensidad de campo magnético externo [T] [kg/s ² A]
c	velocidad de la luz [m/s]
C_p	capacidad calorífica [J/K]
e	energía interna [J]
E	intensidad del campo eléctrico [N/C] [kg m/s ³ A]
f	densidad de fuerza de cuerpo [N] [kg m/s ²]
F	fuerza electromagnética [N] [kg m/s ²]
h	coeficiente externo de transferencia de calor por convección [W/m ² K]
I	densidad de corriente eléctrica total [A] [C/s]
j	corriente de conducción [A/m ²] [C/m ² s]
J_S	flujo de entropía [J/K]
J_S^T	flujo total de entropía [J/K]
J_q	flujo de calor [J]
n	vector unitario perpendicular a la superficie
p	presión [Pa] [N/m ²]
r	vector posición
s	entropía por unidad de masa [J/kg K]
\dot{S}	producción local de entropía por unidad de volumen [J/K]
$\langle \dot{S} \rangle$	producción global de entropía, integrado en su volumen [J/K]
$\ll \dot{S} \gg$	producción global de entropía, integrado en el tiempo y volumen [J/K]
t	tiempo [s]
T	temperatura absoluta [K]
T_a	temperatura ambiente externa [K]
u	campo de velocidades del fluido [m/s]
U_o	velocidad promedio del fluido [m/s]

v	volumen específico [m^3/kg]
V	volumen [m^3]
x	coordenada axial, largo del canal [m]
y	coordenada transversal, altura del canal [m]
z	coordenada a lo ancho del canal [m]

Parámetros adimensionales

B_i	número de Biot [$h a/\kappa$]
M	número de Hartmann [$B_0 a \sqrt{\sigma/\eta}$]
Pr	número de Prandtl [$\eta C_p/\kappa$]
R_ω	número de Reynolds oscilatorio [$\omega a^2 \rho/\eta$]

Símbolos griegos

α	coeficiente de deslizamiento
ε	permitividad eléctrica [F/m]
η	viscosidad dinámica del fluido [kg/m s]
θ_A	temperatura ambiente adimensional
κ	conductividad térmica [J/s K m]
λ	coeficiente de viscosidad [kg/m s]
μ	permeabilidad magnética [N/A^2]
ρ	densidad de masa [kg/m^3]
ρ_e	densidad de carga eléctrica [A/m^2]
σ	conductividad eléctrica [S/m]
τ	tensor de esfuerzos mecánicos
τ'	tensor de esfuerzos viscosos
ω	frecuencia angular [rad/s]
θ	temperatura adimensional
Φ	función de disipación viscosa [J]

INTRODUCCIÓN

La baja eficiencia de los dispositivos energéticos es una de las problemáticas que existen en dispositivos energéticos. El método de minimización de la producción de entropía [1-5] se ha utilizado como herramienta de optimización con base al criterio de máxima eficiencia desde el punto de vista termodinámico. Con éste método se analizan procesos y sistemas irreversibles donde siempre existen pérdidas de energía útil. El objetivo es encontrar valores óptimos de los parámetros relevantes del proceso y/o dispositivos donde las irreversibilidades sean mínimas, y por tanto, determinar condiciones del diseño con la máxima eficiencia posible. En este contexto, flujos magnetohidrodinámicos (MHD) ya se han analizado y se han determinado condiciones óptimas de operación tomando en cuenta la disipación viscosa, disipación óhmica y por conducción de calor en el sistema.

Los sistemas MHD son de gran interés en el sector energético debido a que mediante estos dispositivos es posible transformar energía eléctrica. Estos dispositivos MHD se caracterizan por la circulación de fluidos como el líquido, gas o plasma, conductores de electricidad, dentro de ductos de diferentes geometrías en presencia de campos magnéticos externos [6-10]. Un generador MHD tiene las características descritas anteriormente con la diferencia fundamental que el fluido eléctricamente conductor oscila a través del ducto mediante un dispositivo que genera energía mecánica. Actualmente, las investigaciones sobre generadores MHD están enfocados al diseño de un generador termo-acústico MHD acoplado a un concentrador solar, ya que mediante este sistema de acoplamiento es posible generar electricidad sin necesidad de una fuente mecánica externa capaz de hacer oscilar el fluido, es decir, la energía solar es transformada a energía mecánica debido al gradiente de temperatura dentro de un dispositivo provocando un flujo oscilatorio; el movimiento generado permite la oscilación del fluido eléctricamente conductor dentro del generador MHD, de tal manera se transforma la energía mecánica en energía eléctrica, ver Figura 1.

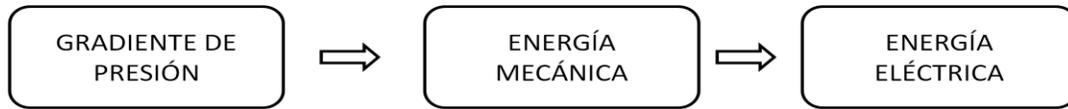


Figura 1. Etapas de la generación de electricidad de un generador MHD.

Lo anterior demuestra la importancia de encontrar valores óptimos de los parámetros que caracterizan un sistema donde las pérdidas de energía útil sean mínimas para un flujo oscilatorio magnetohidrodinámico.

Actualmente, la eficiencia energética de procesos y dispositivos termodinámicos está siendo estudiada con mayor interés. En los trabajos más nuevos sobre diseño térmico y optimización se están tomando en cuenta tres métodos con los cuales se han obtenido resultados confiables. El método de Análisis de Exergía se basa en la primera y segunda ley de la Termodinámica, determinando condiciones de operación óptimas en forma teórica; el análisis nos muestra en cuánto contribuye cada componente del sistema a la irreversibilidad del mismo. El Método de Minimización de la Producción de Entropía (MMPE) es un método de modelación y optimización. La generación de entropía del sistema es determinada como función de los parámetros de diseño del sistema que toman en cuenta dimensiones, tipo de materiales y formas geométricas. Esto permite construir un modelo del sistema el cual involucra los principios fundamentales de la mecánica de fluidos, transferencia de calor, transferencia de masa y termodinámica. Por último, el método basado en la teoría del constructal que toma en cuenta sistemas de flujos los cuales son imperfectos debido a las resistencias por fluido, calor, electricidad, etc. El objetivo de este método consiste en encontrar la configuración del sistema donde las resistencias sean mínimas, en otras palabras donde los efectos sean mínimos [11].

El método de minimización de generación de entropía tiene un gran campo de aplicación para sistemas energéticos. Recientemente, éste método ha sido utilizado por muchos investigadores obteniendo buenos resultados, muy similares a los experimentales. Los estudios realizados son aplicados a dispositivos tales

como intercambiadores de calor [12], planta de potencia [13], celdas de combustibles [14] y sistemas de convección natural y forzada [15-17].

Además de las aplicaciones ya mencionadas, el mismo método ha sido aplicado para sistemas MHD, específicamente en bombas electromagnéticas y generadores eléctricos MHD, en el cual se considera, adicionalmente a las irreversibilidades producidas por la disipación viscosa y la transferencia de calor y masa, la disipación de Joule generada por las corrientes eléctricas que circulan en el fluido conductor [18-20].

En los últimos años, Ibáñez ha realizado investigaciones sobre la producción de entropía en distintos dispositivos, dentro de ellos se encuentran los sistemas MHD. Ibáñez optimizó un flujo radial MHD entre dos discos paralelos [18] y un generador alterno MHD [19], además hizo el análisis de un flujo MHD en un microcanal tomando en cuenta condiciones de fronteras térmicas de tercer tipo [21]. Utilizando las mismas condiciones de frontera él consideró un flujo ordinario entre dos planos paralelos y obtuvo un espesor óptimo de la pared del ducto [22]. Haro demostró en un capítulo del libro “New Trends in Statistical Physics” [23] la manera de hacer un análisis de generación de entropía para un flujo oscilatorio entre dos planos paralelos, éste caso complementa el análisis del generador alterno MHD realizado por Ibáñez. Estas investigaciones mencionadas, se llevaron a cabo tomando en cuenta el efecto de las paredes sin deslizamiento. En la actualidad, los investigadores se están enfocando al efecto del deslizamiento sobre la generación de entropía, tal como lo hizo Aytac [24], quien analizó el efecto de deslizamiento sobre la generación de entropía en un disco rotatorio en un flujo MHD.

El análisis del efecto de deslizamiento ya ha sido desarrollado tanto en sistemas hidrodinámicos como MHD. Smolentsev analizó la condición de deslizamiento para flujos MHD considerando distintos esquemas de estudio [25].

El mismo efecto consideraron Rivero y Cuevas pero para el caso de una microbomba MHD [26]. Otro efecto que también se ha considerado en la optimización es la corriente Hall en un sistema MHD. Saidi analizó la producción

de entropía en un generador MHD [27] y Aithal investigó la energía óptima de extracción de un flujo MHD [28], estos dos últimos consideraron dicho efecto sin deslizamiento en las paredes.

Como se puede observar, la mayoría de los estudios realizados en sistemas MHD con el objeto de minimizar la producción de entropía han considerado las pérdidas de energía útil debidas a disipación viscosa, disipación óhmica, y conducción de calor en el sistema sin tomar en cuenta algunos efectos importantes. Esto conlleva a soluciones poco realistas donde no están presentes efectos que afectan significativamente las pérdidas de energía útil en el sistema. Entre estos efectos se pueden mencionar el deslizamiento del fluido en las interfaces pared-fluido y la aplicación de condiciones de fronteras térmicas de tercer tipo en la solución del problema de transferencia de calor.

En general, se puede notar que diferentes condiciones de frontera térmicas conducen a un diferente proceso de transferencia entre el fluido y sus alrededores, por tanto la solución de la ecuación de energía depende en cuales condiciones de frontera se consideran. La condición de frontera térmica más simple, referenciada como una condición de primer tipo desde que solamente involucra el valor de la temperatura en la frontera, sería para asumir que la temperatura del fluido en las placas coincide con la temperatura ambiente externa. A su vez, una condición de frontera de segundo tipo asume un valor predicho de la derivada espacial en las fronteras, lo que es un flujo de calor de pared constante. Una condición más general, referida como condición de frontera de tercer tipo, el que es una condición de frontera que toma en cuenta tanto el valor de la temperatura y de su derivada espacial en las fronteras, se asume que en las extremidades existe transferencia de calor convectiva entre el fluido y sus alrededores.

Existen muchos sistemas y dispositivos energéticos que no trabajan con la máxima eficiencia posible desde el punto de vista termodinámico. En este contexto, el método de minimización de la producción de entropía es utilizado como una herramienta para optimizar sistemas energéticos utilizando como criterio el de máxima eficiencia. Este método se ha aplicado en sistemas MHD para los

cuales se ha determinado condiciones óptimas de operación, pero en ellos no se han considerado efectos, como las mencionadas en el párrafo anterior, que contribuyen a las pérdidas de energía útil en el sistema, y por consecuencia la eficiencia de estos dispositivos y procesos energéticos es directamente afectada.

Así pues, este trabajo de investigación consiste en el análisis de optimización de flujos MHD considerando el efecto de deslizamiento para el comportamiento dinámico y condiciones de fronteras térmicas de tercer tipo para la determinación del perfil de temperatura del sistema. El estudio nos permitirá encontrar parámetros óptimos de operación que caracterizan al sistema, donde las irreversibilidades sean mínimas, en otras palabras se construirá el modelo de un flujo oscilatorio magnetohidrodinámico con máxima eficiencia exergética lo que constituye un ahorro de energía. Para ello evaluaremos el efecto del deslizamiento y las condiciones de fronteras térmicas de tercer tipo sobre la generación de entropía en un sistema magnetohidrodinámico encontrando valores óptimos de operación. Primeramente se determinará el comportamiento dinámico del sistema MHD con condiciones de deslizamiento en las paredes, considerando la ecuación de balance del momento para el caso de estudio. Luego, se determinará el comportamiento térmico del sistema MHD considerando condiciones de frontera térmicas de tercer tipo, teniendo en cuenta la ecuación de balance de energía para el sistema. Enseguida, determinaremos la generación de entropía local para luego integrar en todo el volumen del sistema MHD y el tiempo para encontrar la expresión de producción de entropía global. Por último, se analizarán los resultados encontrados para determinar los valores óptimos de operación donde las pérdidas de energía útil son mínimas.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1 Termodinámica de procesos irreversibles lineales

El poder de la Termodinámica consiste en que es capaz de establecer leyes generales para procesos cuasi-estacionarios sin recurrir sus mecanismos moleculares. En el análisis de procesos no estacionarios, la Termodinámica Clásica indica solamente su dirección pero no es capaz de obtener resultados cuantitativos. La termodinámica clásica no está interesada en la teoría de procesos irreversibles. Hoy en día, como estos tienen un gran interés práctico, la construcción de una termodinámica de procesos irreversibles es un objetivo natural.

La Termodinámica de Procesos Irreversibles Lineal (TIL) es una teoría fenomenológica bien establecida que provee un marco general para la descripción de los procesos irreversibles que se llevan a cabo en una gran variedad de sistemas. La teoría se basa en cuatro postulados que dan resultados que han sido ampliamente verificados experimentalmente. En particular, ofrece un sólido marco natural para describir los procesos disipativos, tanto en el flujo de fluidos conductores en presencia de campos magnéticos, lo que se conoce como magnetohidrodinámica, como en la hidrodinámica ordinaria.

La TIL es una teoría del continuo, que trata a las variables de estado como funciones continuas de las coordenadas espaciales y del tiempo. Las ecuaciones básicas de la teoría se formulan de manera que contienen únicamente cantidades que sólo se expresan en forma de ecuaciones locales.

Uno de los objetivos fundamentales de la TIL es relacionar explícitamente la fuente de entropía con los diversos procesos irreversibles que se presentan en el sistema. Esto se puede lograr a través de la ecuación de balance de entropía si

conocemos las ecuaciones de masa, momento y energía que describen la evolución temporal de las cantidades que se conservan en el sistema. Para el caso específico de fluidos conductores en presencia de un campo magnético se deben considerar los efectos de dicho campo en las variaciones de las variables conservadas a través de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

Un sistema está en equilibrio si las variables de estado intensivas son constantes a todo tiempo y tienen la misma magnitud en todas las regiones del sistema. Si un sistema está en un estado en el que no se satisfacen estas condiciones, el sistema se encuentra fuera de equilibrio.

El *postulado de equilibrio local* dentro de la TIL permite definir cantidades termodinámicas para sistemas fuera de equilibrio y escribir relaciones termodinámicas en la misma forma que se haría para un sistema en equilibrio total, con la diferencia de que las cantidades termodinámicas toman los valores locales, como funciones del vector posición \mathbf{r} y del tiempo t .

En la termodinámica de no equilibrio es de primordial importancia la ecuación de balance de entropía, que expresa el hecho que la entropía de un elemento de volumen cambia con el tiempo debido a dos razones. En primer lugar cambia porque la entropía fluye a través del elemento de volumen y en segundo lugar porque existe una fuente de entropía (no negativa) debida a los fenómenos irreversibles presentes dentro del elemento de volumen. Esta es la formulación local de una segunda ley de la termodinámica y constituye el *segundo postulado* de la TIL.

La producción de la fuente de entropía puede calcularse si se utiliza la relación termodinámica de Gibbs que conecta la razón de cambio de la entropía en cada elemento de masa, con las razones de cambio de la energía y la composición. La producción de entropía quedará expresada como la suma de términos formados por el producto de un flujo que caracteriza el proceso irreversible y una cantidad denominada fuerza termodinámica.

La *tercera hipótesis* de la TIL plantea que los flujos son funciones lineales de las fuerzas termodinámicas, es decir, si un sistema termodinámico inicialmente en equilibrio, es sometido a la acción de fuerzas termodinámicas suficientemente pequeñas para que su estado perturbado no difiera mucho de su estado de equilibrio inicial, entonces los flujos que se generan como consecuencia de esta acción son proporcionales a dichas fuerzas y las constantes de proporcionalidad (coeficientes fenomenológicos) dependen únicamente de las propiedades del sistema en equilibrio. Matemáticamente este postulado se expresa como $J_i = \sum_k L_{ik} X_k$ y la expresión para la producción de entropía toma la forma $\dot{S} = \sum_i J_i X_i$ donde L_{ik} es la matriz de los coeficientes fenomenológicos o de transporte y J_i y X_i son cualesquiera de las componentes cartesianas de los flujos independientes y las fuerzas termodinámicas.

Otra cuestión importante se refiere a la matriz de coeficientes fenomenológicos que relacionan a los flujos y las fuerzas termodinámicas. Si la matriz es simétrica, el sistema de ecuaciones será completo, en caso contrario se necesitaría más información para poder resolverlo. Esto lleva a introducir una *cuarta hipótesis* conocida como el teorema de reciprocidad de Onsager que plantea la existencia de la simetría de la matriz de los coeficientes fenomenológicos.

1.2 Balance de entropía

De acuerdo con los principios de la termodinámica, para un sistema macroscópico se puede introducir una función de estado S , llamada entropía, que tiene las siguientes propiedades.

El cambio de entropía dS se puede escribir como la suma de dos términos

$$dS = d_e S + d_i S \quad (1.1)$$

Donde $d_e S$ es la entropía suministrada al sistema por sus alrededores y $d_i S$ es la entropía producida dentro del sistema. La segunda ley de la termodinámica establece que

$$d_i S = 0 \text{ para un proceso reversible} \quad (1.2)$$

$$d_i S > 0 \text{ para un proceso irreversible} \quad (1.3)$$

La termodinámica de equilibrio estudia procesos reversibles para los que se cumple la igualdad (1.2). En la TIL uno de los objetivos importantes es relacionar la producción de entropía $d_i S$ con los diversos fenómenos irreversibles que ocurren dentro del sistema.

Dado que la entropía es una cantidad extensiva es posible obtener expresiones para la entropía total S y para su razón de cambio temporal

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho s}{\partial t} dV \quad (1.4)$$

Donde s es la entropía por unidad de masa, ρ la densidad de masa y V el volumen. Asimismo, puede escribirse una ecuación de balance de entropía que en forma integral se expresa como

$$\int_V \frac{\partial \rho s}{\partial t} dV = - \int_A \mathbf{J}_s^T \cdot \mathbf{n} da + \int_V \dot{S} dV \quad (1.5)$$

Donde \mathbf{J}_s^T es el flujo total de entropía, \mathbf{n} el vector unitario perpendicular a la superficie A y \dot{S} es la producción de entropía por unidad de volumen. Diferenciando (1.1) con respecto al tiempo y comparando con la ecuación (1.5), se puede asociar

$$d_e S = - \int_A \mathbf{J}_s^T \cdot \mathbf{n} da \quad (1.6)$$

$$d_i S = \int_V \dot{S} dV \quad (1.7)$$

Al utilizar el teorema de Gauss, la ecuación (1.5) se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s^T + \dot{S} \quad (1.8)$$

Donde la condición suficiente es

$$\dot{S} \geq 0 \quad (1.9)$$

La ecuación (1.8) es una ecuación de balance para la densidad de entropía ρs , con un término fuente que satisface la desigualdad (1.9). Esta desigualdad, que expresa que la producción de entropía es una cantidad no negativa, es el segundo postulado de la TIL y se puede entender como una extensión de la segunda ley de la termodinámica para situaciones fuera de equilibrio.

Definiendo el flujo de entropía \mathbf{J}_s como la diferencia entre el flujo total de entropía y un término convectivo $\rho s \mathbf{u}$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s^T - \rho s \mathbf{u} \quad (1.10)$$

La ecuación (1.8) se puede reescribir en la forma

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \dot{S} \quad (1.11)$$

Donde \mathbf{u} es el campo de velocidades del fluido y d/dt denota la derivada material dada por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (1.12)$$

La hipótesis de equilibrio local implica la validez local de la relación de Gibbs, donde ahora las diferenciales que aparecen en ella deben tomarse como funciones de las coordenadas y el tiempo, es decir, será una relación entre las derivadas totales

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (1.13)$$

Donde T es la temperatura absoluta y p la presión. Esta relación nos permite deducir la forma como cambia la entropía del sistema en el tiempo, si se conocen las ecuaciones que describen la evolución temporal de las cantidades e y ρ , obteniendo con esta expresión el balance de entropía y con ayuda de las ecuaciones de conservación es posible obtener expresiones explícitas para el flujo y la producción de entropía.

1.3 Ecuaciones de balance

El principal efecto de un campo magnético sobre un fluido conductor es, por una parte, el surgimiento de fuerzas de cuerpo sobre el fluido (intercambio de cantidad de movimiento), y por otra, el intercambio de energía entre el campo y el fluido. En consecuencia las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos por sí misma ya son suficientes para dar una descripción adecuada del fenómeno cuando se considera la interacción electromagnética, y es necesario combinarlas con las ecuaciones del campo electromagnético a fin de obtener las ecuaciones fundamentales que gobiernan el flujo de un fluido conductor en presencia de un campo magnético.

1.3.1 Balance de masa

Considérese un sistema monocomponente donde no existen reacciones químicas y sea $\rho(\mathbf{r}, t)$ la densidad de masa y $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ el campo de velocidades del fluido. En su forma integral la ecuación de conservación de masa establece que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.14)$$

Donde dV es el elemento de volumen ocupado por el fluido. Con ayuda del teorema de transporte de Reynolds la ecuación anterior puede expresarse en la forma

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = 0 \quad (1.15)$$

Puesto que el integrando es una función continua y el volumen de integración es arbitrario, se tiene que

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.16)$$

Utilizando (1.12), de la ecuación anterior se obtiene la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{u} \quad (1.17)$$

Como puede apreciarse, la ecuación (1.17) no se ve alterada por la interacción electromagnética y expresa el hecho de que la masa total se conserva, es decir,

que la masa total en cualquier elemento de volumen del sistema sólo puede cambiar si la materia fluye a través del elemento de volumen.

1.3.2 Conservación de momento lineal

La ecuación de balance de momento en su forma integral es la siguiente

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = - \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \mathbf{f} dV \quad (1.18)$$

La integral de superficie del lado derecho considera las fuerzas de superficie que se presentan en el fluido, donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos mecánicos. La segunda integral del lado derecho toma en cuenta las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido, siendo \mathbf{f} la densidad de fuerza de cuerpo. Mediante el teorema de transporte de Reynolds y utilizando la ecuación de balance de masa (1.16), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV \quad (1.19)$$

Mientras que, utilizando el teorema de Gauss, se tiene que

$$\int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV \quad (1.20)$$

Sustituyendo (1.19) y (1.20) en la ecuación (1.18) se obtiene la forma diferencial de la ecuación de balance de momento lineal, es decir

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (1.21)$$

El efecto del campo electromagnético se incorpora a través de la fuerza Lorentz, la cual es una fuerza de cuerpo. Para obtener la densidad de fuerza de Lorentz se deben tener presentes algunas consideraciones.

La fuerza sobre una carga eléctrica depende de los campos eléctricos y magnéticos presentes y de la velocidad con que se desplaza dicha carga. En todo punto del espacio se caracteriza por dos cantidades vectoriales, la primera es la fuerza eléctrica que da una componente de la fuerza que es independiente del movimiento de la carga, y se describe por medio del campo eléctrico en la forma $z\mathbf{E}$, donde z es la carga por unidad de masa. La segunda componente es la fuerza magnética cuya dirección y módulo dependen de la dirección y la velocidad con que se mueve la partícula siendo siempre perpendicular al vector velocidad y al campo magnético. Así la fuerza magnética se puede expresar como $z\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. La ley de Lorentz para la fuerza electromagnética es entonces

$$\mathbf{F} = z(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.22)$$

Para un medio continuo que contenga partículas cargadas, la densidad de carga ρ_e está dada por ρz .

Asimismo, la densidad de corriente eléctrica total \mathbf{I} puede escribirse en términos de la velocidad \mathbf{u} de la sustancia, como

$$\mathbf{I} = \rho z\mathbf{u} + \mathbf{j} \quad (1.23)$$

Donde $\rho z\mathbf{u}$ es la corriente eléctrica debida a la convección y \mathbf{j} es la corriente de conducción. Entonces para un medio continuo con densidad de carga ρz y densidad de corriente \mathbf{I} , la ecuación (1.22) se transforma en la densidad de fuerza

$$\mathbf{f} = \rho z\mathbf{E} + \mathbf{I} \times \mathbf{B} \quad (1.24)$$

De modo que para un fluido conductor que se desplaza en un campo magnético la ecuación de balance de momento es

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho z \mathbf{E} + \mathbf{I} \times \mathbf{B} \quad (1.25)$$

Utilizando la ecuación (1.23) esta ecuación se puede escribir como

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho z (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.26)$$

1.3.3 Balance de energía

La forma integral de la ecuación de balance de la energía es la siguiente

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV = - \int_A \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} da - \int_A (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} da + \int_V \mathbf{I} \cdot \mathbf{E} dV \quad (1.27)$$

El miembro izquierdo de la ecuación anterior representa la tasa de cambio temporal de la energía contenida en el volumen V , donde ρe y $\rho u^2/2$ son las densidades de energía interna y cinética, respectivamente. El primer término del miembro derecho representa la transferencia de calor por conducción térmica debida a la diferencia de temperaturas en el fluido, donde \mathbf{J}_q denota al flujo de calor. El segundo término del lado derecho representa el flujo de energía a través de la superficie, tanto por transporte de masa como por procesos de fricción interna. El último término representa la tasa de cambio temporal a la cual el campo electromagnético hace trabajo sobre el volumen de fluido V , esta potencia representa una conversión de energía electromagnética en energía mecánica o térmica.

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds y la ecuación de balance de masa se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV = \int_V \rho \left(\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt} \right) dV \quad (1.28)$$

Y del teorema de Gauss

$$\int_A \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_q dV \quad (1.29)$$

$$\int_A (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) dV \quad (1.30)$$

De donde la ecuación (1.27) puede expresarse en la siguiente forma integral

$$\rho \left(\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{E} \quad (1.31)$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \mathbf{u} \cdot \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{E} \quad (1.32)$$

Y con la ayuda de la ecuación de la conservación de momento (1.25) y la ecuación (1.23), (1.39) toma la forma

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.33)$$

Ya que

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{u} \quad (1.34)$$

donde p es la presión, usando (1.17), se obtiene

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \rho p \frac{dv}{dt} - \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.35)$$

donde $\boldsymbol{\tau}'$ es el tensor de esfuerzos viscosos. Esta ecuación es la formulación local de la primera ley de la termodinámica y establece que la energía interna por unidad de volumen y tiempo puede variar debido a flujo de calor e interacciones mecánicas o electromagnéticas.

1.4 Producción de entropía

Una vez obtenidas las ecuaciones de conservación es posible obtener una forma explícita para el flujo y la producción de entropía. De acuerdo a los principios formulados anteriormente, introduciendo en la expresión (1.13), que representa el balance de entropía obtenido a partir de la ecuación de Gibbs, la ecuación (1.35), se obtiene

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_q}{T} \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.36)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1.11) se observa que el flujo de entropía está dada por

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{T} \mathbf{J}_q \quad (1.37)$$

Y la producción de entropía por

$$\dot{S} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.38)$$

La ecuación (1.37) muestra que para sistemas abiertos, el flujo de entropía está dado a través del flujo de calor \mathbf{J}_q , mientras que la expresión (1.38) muestra que la producción de entropía contiene tres diferentes contribuciones, que producen las irreversibilidades del sistema. El primer término del lado derecho de (1.38) surge de la conducción de calor, el segundo está relacionado con los procesos de fricción en un flujo viscoso y el tercero se debe a la conducción de electricidad. La estructura de la expresión para \dot{S} es una forma bilineal, ya que consiste de la suma de términos que son el producto escalar de dos factores, que se identifican con el flujo y un término que da lugar al flujo, es decir, tomando en cuenta sólo efectos directos se puede decir que el segundo factor se relaciona con la causa que experimentalmente se ha establecido que da lugar al proceso irreversible y que generalmente se manifiesta como el gradiente de una variable de estado intensiva o como una fuerza externa como en el caso electromagnético. De esta manera el flujo de calor se relaciona con el gradiente de temperatura, los fenómenos viscosos se atribuyen a gradientes de velocidades y el movimiento de partículas cargadas se origina por los campos electromagnéticos.

De todo lo anterior se infiere que el conjunto de ecuaciones de conservación junto con la de balance de entropía y las ecuaciones de estado, contienen a los flujos irreversibles como incógnitas y por tanto deben darse ecuaciones fenomenológicas adicionales que relacionan los flujos y las fuerzas termodinámicas, para poder obtener un sistema de ecuaciones cerrado que pueda resolverse para las condiciones iniciales y de frontera dadas. Estas ecuaciones constitutivas para los flujos de calor, momento y corriente eléctrica, en ausencia de efectos cruzados, son las leyes ordinarias de Fourier, Navier-Newton y Ohm, respectivamente, y establecen relaciones lineales entre los flujos y los gradientes o fuerzas generalizadas que dan lugar a los procesos irreversibles:

$$\mathbf{J}_q = -\kappa \nabla T \quad (1.39)$$

$$\boldsymbol{\tau}' = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{1} - \eta (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (1.40)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.41)$$

Donde κ , λ , η y σ son la conductividad térmica, el segundo coeficiente de viscosidad, la viscosidad dinámica y la conductividad eléctrica del fluido, respectivamente. El superíndice T significa que es una matriz transpuesta del gradiente de velocidad y $\mathbf{1}$ es el tensor unitario.

Si se sustituyen estas relaciones lineales en (1.38), podemos darnos cuenta de que se presenta una forma cuadrática respecto a las fuerzas generalizadas. Por lo tanto, para que la producción de entropía será positiva los coeficientes de transporte (κ , λ , η , σ) deben ser positivos, lo que concuerda con los experimentos.

1.5 Ecuaciones del campo electromagnético

Las ecuaciones básicas del electromagnetismo son conocidas como ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones junto con la ecuación de Lorentz para la fuerza, describen al campo electromagnético y a su interacción con la carga, que se caracteriza por las siguientes cantidades macroscópicas: intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, inducción magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, densidad de corriente eléctrica $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ y densidad de carga eléctrica $\rho_e(\mathbf{r}, t)$, que también puede expresarse como $\rho z(\mathbf{r}, t)$, donde z es la carga por unidad de masa.

En su forma diferencial las ecuaciones de Maxwell se expresan de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho z}{\epsilon} \quad (1.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.43)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.44)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1.45)$$

Donde ε y μ son escalares conocidos como la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio, respectivamente.

En general ε y μ podrían depender del estado termodinámico del medio, sin embargo para la gran mayoría de los problemas en que existen fluidos conductores pueden considerarse constantes. En particular, al trabajar con metales líquidos es posible tomar como una muy buena aproximación $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío.

1.6 Magnetohidrodinámica (MHD)

El estudio de flujos de fluidos eléctricamente conductores y que se mueven en presencia de un campo magnético es conocido como Magnetohidrodinámica o más corto MHD. En nuestra discusión, evitamos generalidades completas y con una sola excepción se usa la ecuación básica de Euler considerando los términos magnéticos. Esto es suficiente para destacar los efectos magnéticos peculiares y es adecuado para muchas aplicaciones.

El ejemplo más simple de un fluido eléctricamente conductor es un metal líquido, por ejemplo, mercurio o sodio líquido. Sin embargo, el mayor uso de MHD es en la física de plasma (un plasma es gas ionizado caliente que contiene electrones libre e iones).

Hay dos importantes aplicaciones tecnológicas de la MHD que pueden llegar a ser muy importantes en el futuro. En la primera, los campos magnéticos fuertes son

usados para confinar anillos o columnas de calor de plasma (es esperado) lo que se llevará a cabo en el lugar con el tiempo suficiente para que la fusión termonuclear ocurra y para que la energía neta sea generada. En la segunda, la cual es dirigida hacia una meta similar, los metales líquidos son manejados mediante un dispositivo que genera energía mecánica a través de un campo magnético para generar electricidad. El estudio de magnetohidrodinámicas es también motivado por su aplicación generalizada para la descripción del espacio (dentro del sistema solar) y los plasmas astrofísicos (más allá del sistema solar).

Las ecuaciones de balance vista en los epígrafes anteriores pueden ser simplificadas mediante la aproximación MHD que se basa en las siguientes suposiciones

- La velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz (aproximación no relativista, $u^2 \ll c^2$).
- Los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias.
- Los campos eléctricos son del orden de magnitud de la fuerza electromotriz (fem) inducida, $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

Se desprecia la corriente de desplazamiento de Maxwell, $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, en la ecuación (1.45) debido que no intervienen oscilaciones de alta frecuencia, y significa que se desprecia el proceso de acumulación o redistribución de cargas eléctricas.

En flujos de metales líquidos en campos magnéticos la magnitud de los términos \mathbf{E} y $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ son del mismo orden, es decir que los campos eléctricos son del orden de magnitud de los efectos inducidos, por tanto el campo magnético inducido es mucho menor que el campo magnético aplicado.

Considerando el cociente de la magnitud de los términos $\rho z \mathbf{E}$ y $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$ que aparecen en la fuerza Lorentz (1.24), y suponiendo que $|\mathbf{E}| \approx |\mathbf{u} \times \mathbf{B}|$, se encuentra que dicho cociente es de orden u^2/c^2 , por lo que el término eléctrico en la fuerza Lorentz resulta despreciable comparado con $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$. Con una consideración similar,

los términos $\rho z \mathbf{u}$ y \mathbf{j} de la densidad de corriente eléctrica total (1.23), la parte de la corriente convectiva $\rho z \mathbf{u}$ es despreciable en esta aproximación; por consiguiente, la corriente de conducción \mathbf{j} se toma como la corriente total \mathbf{I} , y de la ecuación (1.24) se obtiene que $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$.

Tomando en cuenta las aproximaciones anteriores, las ecuaciones fundamentales de la MHD para un fluido conductor en presencia de un campo magnético, expresadas en forma diferencial, son

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.46)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.47)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.49)$$

$$\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \quad (1.50)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.52)$$

Donde se ha omitido la ecuación de Gauss para el campo eléctrico, ya que ρ_e no es de interés en la MHD y además los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} quedan determinados por las ecuaciones restantes (1.49 – 1.52) y la ecuación constitutiva para \mathbf{j} (ley de Ohm).

Capítulo 2

Modelo Matemático

2.1 Introducción

Con base a los fundamentos matemáticos se va a determinar el campo de velocidades considerando el deslizamiento en las paredes, así también se estudiará el comportamiento térmico, para esto se resuelve la ecuación de energía usando condiciones de frontera de tercer tipo que indica que el gradiente de temperatura normal en cualquier punto es la extremidad es proporcional a la diferencia entre la temperatura en la superficie y la temperatura ambiente externa. Por lo tanto, la cantidad de calor que entra y sale del sistema depende de la temperatura externa también como en el coeficiente de transferencia de calor convectiva. Además se considera condiciones donde el flujo es completamente desarrollado tal que la transferencia de calor convectiva dentro del fluido se desprecia.

Para la determinación de la producción de entropía de manera explícita para el sistema a estudiar es necesario encontrar los comportamientos dinámico, térmico y electromagnético. Para esto, se resuelven las ecuaciones de balance del fluido tomando en cuenta las ecuaciones de la teoría electromagnética bajo la aproximación MHD y otras suposiciones que se consideren.

Este capítulo tiene como objetivo explicar el desarrollo del procedimiento matemático que conlleva a la descripción del comportamiento del sistema oscilatorio magnetohidrodinámico. Por lo tanto, en esta parte se empieza descubriendo las ecuaciones fundamentales para modelar el sistema matemáticamente, luego se describe el sistema de interés y con base en esto se determinan las expresiones que nos describen el comportamiento dinámico,

térmico y eléctrico del sistema. Por último se encuentra el desarrollo de la expresión local y global de entropía para el flujo oscilatorio MHD.

2.2 Ecuaciones Fundamentales

El sistema de ecuaciones a resolver para el flujo de un metal líquido en presencia de campo magnético se describe a continuación.

El método de minimización de la producción de entropía es aplicable para sistemas energéticos irreversibles, es decir siempre existirán pérdidas de energía útil. La cuantificación de estas pérdidas se realiza a través de la Entropía. Por lo tanto en estos tipos de sistemas la producción de entropía siempre va ser positiva.

Las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes son, respectivamente

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

Donde \mathbf{u} , p y \mathbf{j} son los campos de velocidad, presión y densidad de corriente eléctrica mientras ρ y η son la densidad de masa y la viscosidad dinámica del fluido.

La ecuación de transferencia de calor se expresa como

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = \kappa \nabla^2 T + \Phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2.3)$$

Donde T , \mathbf{E} y Φ son la temperatura, el campo eléctrico y la función de disipación viscosa, respectivamente; mientras que C_p y κ son el calor específico a presión constante y la conductividad térmica del fluido, respectivamente.

Las ecuaciones del campo electromagnético requeridas para cerrar la descripción, en la aproximación cuasi-estática son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.7)$$

Donde \mathbf{B} es el campo magnético. Por último, μ y σ son permeabilidad magnética del medio y conductividad eléctrica del fluido.

2.3 Descripción del Sistema

Un flujo oscilatorio magnetohidrodinámico (MHD) es un sistema termodinámico irreversible el cual consiste en la circulación de un fluido conductor de electricidad, ya sea líquido, gas o plasma, a través de ductos de diferentes geometrías en presencia de campos magnéticos.

Un flujo oscilatorio ordinario (fluido no conductor) se caracteriza principalmente por la oscilación dentro de un ducto, sin la presencia de campo magnético externo; el ducto tiene geometría rectangular con una distancia de paredes laterales de $2b$ y una altura de estas paredes de $2a$.

El flujo de Hartmann es considerado como un flujo simple estacionario unidireccional de un fluido eléctricamente conductor que fluye a lo largo de un ducto de sección transversal perpendicular a un campo magnético uniforme B_0 . El ducto tiene las mismas características mencionadas arriba. En este caso se asume dos paredes conductoras y las otras dos eléctricamente aislantes. En cambio, un flujo de Hartmann oscilatorio es aquel que cumple las características

descritas en este párrafo, excepto que la velocidad del fluido que es unidireccional se manifiesta tanto en el sentido positivo de la coordenada como en el negativo (Figura 2.1). Particularmente, debe ser un flujo transitorio y no un flujo ordinario en un solo sentido, por tanto las ecuaciones a resolver son distintas en los dos casos, siendo el caso oscilatorio de mayor complejidad comparada con el no oscilatorio.

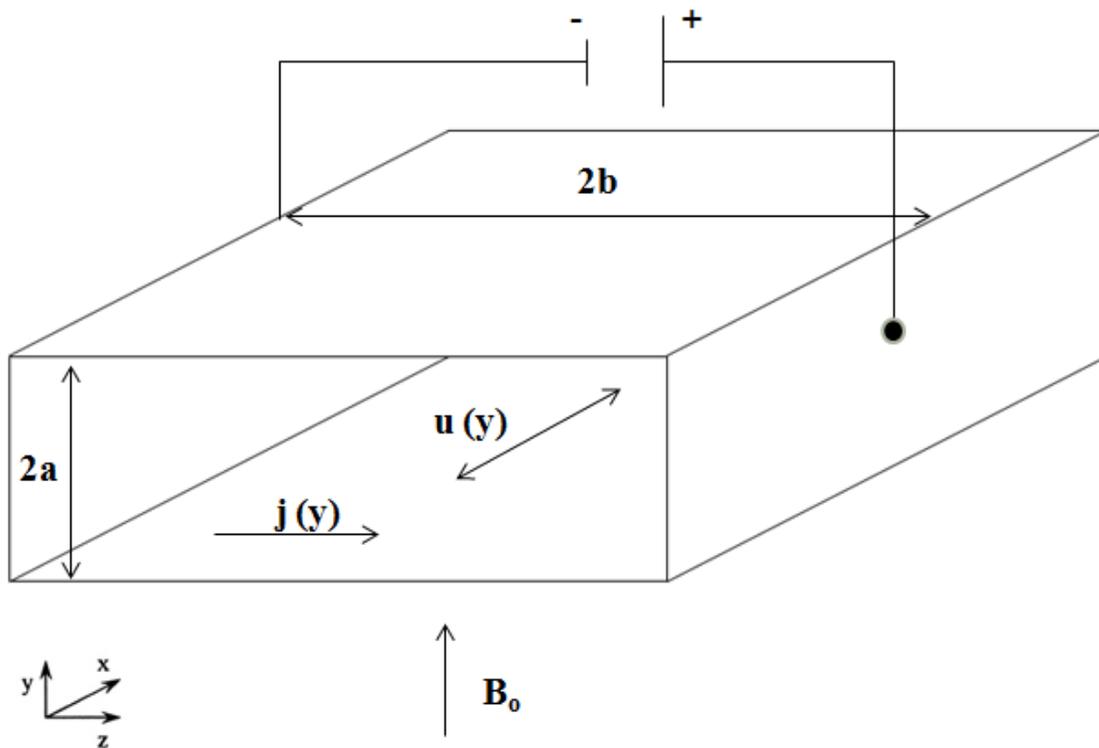


Figura 2.3.1. Esquema de un flujo oscilatorio MHD.

Cuando el fluido conductor de electricidad circula en el dispositivo MHD se puede apreciar tres tipos de pérdidas de energía, ver Figura 2.3.2; disipación de energía por fricción viscosa que ocurre entre el fluido y las paredes y disipación de energía debida a conducción del calor y conducción eléctrica que ocurre en el fluido. Las

pérdidas mencionadas corresponden a la generación de entropía en el sistema, cuya expresión será determinada y analizada en capítulos posteriores.

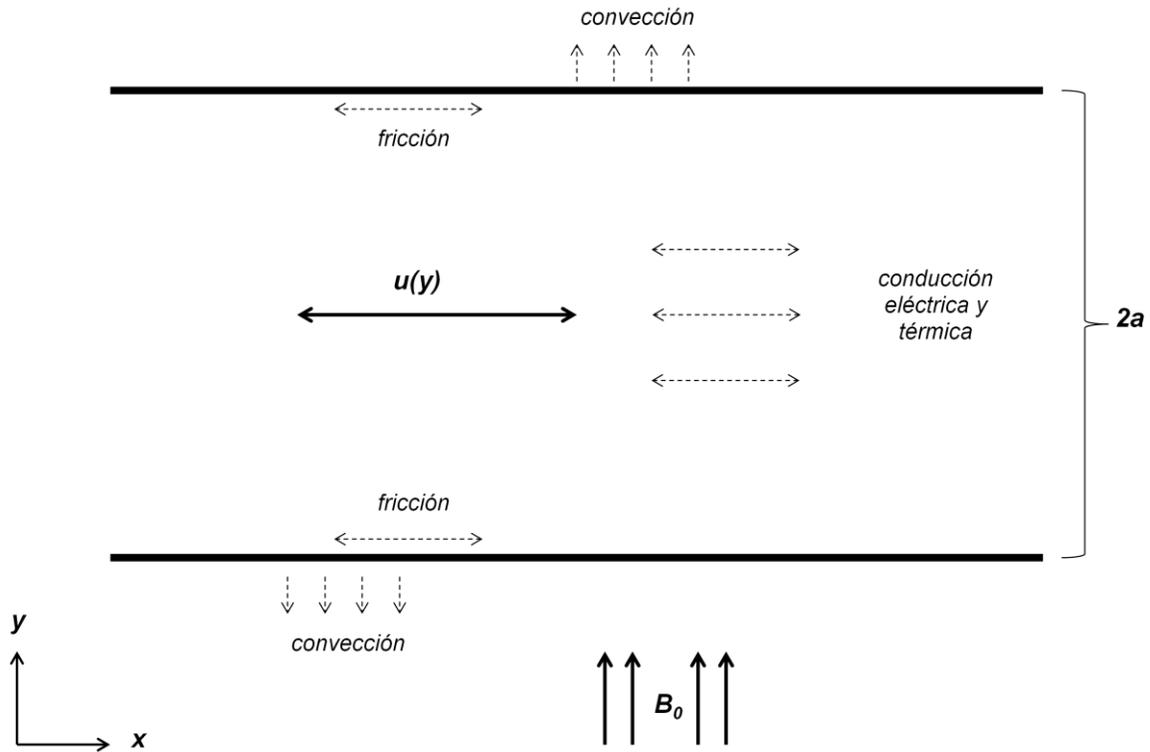


Figura 2.3.2. Pérdidas de energías en un flujo oscilatorio MHD.

2.4 Campo de Velocidad

Primero se formula o se determina la ecuación de balance de momento que define al sistema de estudio tomando en cuenta las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes, respectivamente

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.9)$$

Donde \mathbf{u} , P , \mathbf{B} y \mathbf{j} son los campos de velocidad, presión, campo magnético y densidad de corriente eléctrica, mientras ρ y η son la densidad de masa y la viscosidad dinámica del fluido.

Como sabemos, la ecuación de balance de momento se basa en la segunda ley de Newton donde nos menciona que la fuerza es equivalente a la masa del objeto por su aceleración, así pues la parte izquierda de la ecuación (2.9) corresponde a la masa por la aceleración y todos los términos de la parte derecha son las fuerzas generadas en el movimiento del fluido; el primer término de la derecha es la fuerza por gradiente de presión, el segundo por fricción viscosa y el último debido a la fuerza Lorentz.

Considerando la ecuación de continuidad, que el gradiente de presión está en dirección axial y que el vector velocidad tiene una única componente en el eje x dependiente de la coordenada transversal, $\mathbf{u} = [u(y), 0, 0]$, la ecuación (2.9), para el sistema oscilatorio magnetohidrodinámico, se reduce a

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.10)$$

Como puede observarse, esta ecuación tiene expresada el tercer término del lado izquierdo como producto de dos vectores. La expresión explícita se determina tomando en cuenta 1) la ley de Ohm, $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, 2) el vector velocidad es monocomponente y 3) que el campo magnético es aplicado de manera transversal, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(0, B_0, 0)$, donde B_0 es el flujo constante de campo magnético. Entonces para encontrar la densidad de corriente eléctrica se hace la siguiente operación

$$\mathbf{j} = \sigma \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = \sigma(0\hat{i} + 0\hat{j} + uB_0\hat{k}) \quad (2.11)$$

De esta ecuación puede notarse que la corriente eléctrica generada por el sistema estará en una dirección perpendicular al movimiento del fluido y al flujo de campo magnético, dicha dirección pertenece al eje de la z.

Luego de encontrar la densidad de corriente se determina la expresión de la fuerza Lorentz del sistema.

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \sigma u B_0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = -\sigma u B_0^2 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} \quad (2.12)$$

El resultado del producto de ambos vectores corresponde a una velocidad que se contrapone al sentido del fluido.

Sustituyendo la ecuación (2.12) en (2.10)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 u \quad (2.13)$$

Debido a que el sistema es un fluido oscilatorio se propone la velocidad como una parte real y otra imaginaria, $u = u_0(y)e^{i\omega t}$, donde ω es la frecuencia de oscilación y el gradiente de presión se define como $G e^{i\omega t}$, G es una constante, teniendo estas condiciones la ecuación (2.13) que da la forma

$$i\omega\rho u_0 = -G + \eta \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \sigma B_0^2 u_0 \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) puede expresarse de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = K + (M^2 + iR_\omega)u_0 \quad (2.15)$$

Donde la coordenada y^* está normalizada con el valor medio de la distancia entre los planos, a . K es una constante para simplificar la ecuación y es igual a $\frac{Ga^2}{\eta}$. Aquí $M = B_0 a \sqrt{\sigma/\eta}$ es el número de Hartmann, el cual da una estimación de la fuerza magnética comparada con la fuerza viscosa y $R_\omega = \omega a^2 \rho/\eta$ es el número de Reynolds oscilatorio, cuya raíz cuadrada compara la longitud característica con la distancia de penetración viscosa, en otras palabras proporcionan la intensidad de campo magnético y la frecuencia del oscilación del fluido, respectivamente.

Para la solución de la ecuación (2.15) se propone condición de deslizamiento del fluido sobre la pared, estas condiciones son

$$u_0 - \alpha_1 \frac{\partial u_0}{\partial y^*} = 0 \quad \text{en } y^* = -1 \quad (2.16)$$

$$u_0 + \alpha_2 \frac{\partial u_0}{\partial y^*} = 0 \quad \text{en } y^* = 1 \quad (2.17)$$

Donde α_1 y α_2 son el deslizamiento de la pared inferior y superior, respectivamente, el cual nos proporciona la velocidad inicial en dicha pared cuando el sistema esta completamente desarrollado. Por lo tanto, la solución es

$$u_0(y^*) = \frac{\alpha'}{F_1} [\beta(\alpha_1 - \alpha_2) Sh(\beta) Sh(\beta y^*) + (2Sh(\beta) + \beta(\alpha_1 + \alpha_2) Ch(\beta)) Ch(\beta y^*) - F_1] \quad (2.18)$$

Donde

$$\alpha' = \frac{K}{M^2 + iR_\omega} \quad (2.19)$$

$$\beta = \sqrt{M^2 + iR_\omega} \quad (2.20)$$

$$F_1 = \beta(\alpha_1 + \alpha_2)(Sh^2(\beta) + Ch^2(\beta)) + 2Sh(\beta)Ch(\beta)(1 + \alpha_1\alpha_2\beta^2) \quad (2.21)$$

Como se mencionó anteriormente, la ecuación corresponde a una solución que tiene parte imaginaria y parte real, debido a que la parte real es de interés en el problema, es necesario encontrar el complejo conjugado de la solución, sumar ambas expresiones y enseguida dividirlo en dos

$$u_R = \frac{u_0 + \bar{u}_0}{2} \quad (2.22)$$

Donde u_R es la parte real de la solución para la velocidad y la barra representa el complejo conjugado de la velocidad.

La expresión resultante de la ecuación (2.22) se divide entre su promedio U_0 para encontrar la ecuación adimensional de la velocidad

$$U_0 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (u_0 + \bar{u}_0) dy^* \quad (2.23)$$

Por lo tanto, la ecuación que determina el comportamiento dinámico del flujo oscilatorio MHD es

$$u_0^* = \frac{\bar{\beta}^2 \bar{F} (A_1 Sh[\beta y^*] + A_2 Ch[\beta y^*]) + \beta^2 F (\bar{A}_1 Sh[\bar{\beta} y^*] + \bar{A}_2 Ch[\bar{\beta} y^*]) - A_3}{\frac{\bar{\beta}^2 \bar{F}}{\beta} A_2 Sh[\beta] + \frac{\beta^2 F}{\bar{\beta}} \bar{A}_2 Sh[\bar{\beta}] - A_3} \quad (2.24)$$

Donde las nuevas constantes se encuentran en el Anexo. Está comprobado que la ecuación (2.24) conlleva a la solución correcta ya que al encontrar el límite cuando tiende a cero de la frecuencia de oscilación, la intensidad del campo magnético y el coeficiente de deslizamiento de las paredes ($R_\omega \rightarrow 0, M \rightarrow 0, \alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$) corresponde a la ecuación de Poiseuille.

La solución que describe finalmente el comportamiento dinámico del sistema es

$$u^* = u_0^* e^{i\omega t} = u_0^* e^{it^*} \quad (2.25)$$

Donde t^* es el tiempo normalizado por ω .

Como puede notarse la solución corresponde a una función que depende de las variables que caracterizan al sistema $u^* = f(R_\omega, M, \alpha_1, \alpha_2, y^*, t^*)$ y con ello podemos describir como estos parámetros influyen en los perfiles de velocidad, esto es visto en detalle en el capítulo 3 de la presente.

2.5 Campo de Temperatura

La ecuación de transferencia de calor nos permite conocer el comportamiento térmico del sistema de interés, se escribe

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = \kappa \nabla^2 T + \Phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2.26)$$

Donde T , \mathbf{E} y Φ son la temperatura, el campo eléctrico y la función de disipación viscosa, respectivamente; C_p y κ son el calor específico a presión constante y la conductividad térmica del fluido, respectivamente.

Algunos de los términos de la ecuación (2.26) tienen las siguientes equivalencias

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) T = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.27)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \Phi = 2\eta & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \eta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Donde u, v y w son las componentes del campo de velocidad, mientras que x, y y z son sus coordenadas.

Si se considera que $\mathbf{u} = [u(y), 0, 0]$, es decir, la velocidad que depende sólo de la componente axial que está en función de la coordenada transversal, y que $T = f(y)$, la temperatura depende de y ; las ecuaciones (2.27) al (2.29) se reducen a:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)T = u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.31)$$

$$\Phi = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.32)$$

Sustituyendo estos términos en la ecuación de transferencia de calor (ecuación 2.26)

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (2.33)$$

El primer término de la parte izquierda de la ecuación corresponde a un sistema transitorio, tal es el caso para el sistema que se estudia, es decir, varía la temperatura a través del tiempo. El segundo término nos proporciona la transferencia de energía por convección, éste término puede ser despreciado por que la variación de la temperatura a lo largo del canal no se hace notar ya que la coordenada axial es infinitamente mayor en comparación de la coordenada transversal. Los términos del lado derecho representan transferencias de energía por conducción de calor, fricción viscosa y conducción eléctrica, respectivamente.

En el último término del lado derecho de la ecuación (2.33) el vector \mathbf{j} es determinado por la ley de Ohm, mientras que el campo eléctrico \mathbf{E} es igual al campo eléctrico existente dentro del sistema más la corriente generada por el

efecto que ocurre entre el campo de velocidad y el campo magnético ($u \times B$). Para el caso de estudio, el campo eléctrico del sistema es despreciable en comparación de la corriente generada por la velocidad y el campo magnético. Dicho término puede ser expresado de la siguiente manera

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} \quad (2.34)$$

Tomando en cuenta el resultado de la intensidad de corriente eléctrica determinado anteriormente, ver ecuación (2.11), y sustituyendo en la ecuación (2.34), entonces

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma u^2 B_0^2 \quad (2.35)$$

Considerando la explicación de la transferencia por convección despreciada mencionada arriba y el último término del lado derecho, la ecuación (2.33) queda

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \sigma u^2 B_0^2 \quad (2.36)$$

Escrita de manera adimensional

$$Pr R_\omega \frac{\partial \theta}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + M^2 u^{*2} \quad (2.37)$$

Donde $\theta = \kappa T / \eta U_0^2$, $t^* = t\omega$, $y^* = y/a$ y $u^* = u/U_0$ son la temperatura, tiempo, coordenada transversal y velocidad, respectivamente, todos ellos adimensionales. Además, $Pr = \eta C_p / \kappa$ es el número de Prandtl que representa la relación de difusión en el fluido de los efectos viscosos respecto a los efectos térmicos, R_ω y M son el número de Reynolds oscilatorio y número de Hartmann, respectivamente, definidos anteriormente.

La solución de la ecuación (2.37) es propuesta como una parte estacionaria θ_s , y otra como inestable θ_u , debido a que es un flujo oscilatorio

$$\theta(y^*, t^*) = \theta_u(y^*)e^{2it^*} + \theta_s(y^*) \quad (2.38)$$

Se sustituye la ecuación (2.38) en la ecuación (2.37) para encontrar la expresión tanto para θ_s como θ_u , que nos permita definir los campos de temperatura. Una vez hecho la sustitución correctamente, se procede a poner los factores en común en una sola ecuación, es decir los términos que contengan e^{2it^*} se colocan en una única ecuación y esta expresión es la ecuación para θ_u , y para los términos que no tienen partes imaginarias la solución es para θ_s , entonces

$$\frac{\partial^2 \theta_s}{\partial y^{*2}} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} \right)^2 + (Mu_0^*)^2 \right] \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_u}{\partial y^{*2}} - 2iPrR_\omega \theta_u = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} \right)^2 + (Mu_0^*)^2 \right] \quad (2.40)$$

Es necesario notar que u_0^* corresponde a la ecuación dividida con su promedio, $u_0^* = u_0/U_0$, y no el de la solución final, $u^* = u_0^*e^{it^*}$. Antes de comenzar a resolver las ecuaciones es de gran utilidad encontrar los términos explícitos que corresponden a la velocidad (términos del lado derecho).

Para la solución de las ecuaciones se proponen condiciones de frontera de tercer tipo, tanto para la temperatura estable como la inestable

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} + Bi_1(\theta_s - \theta_A) = 0 \quad \text{en } y^* = 1 \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} - Bi_2(\theta_s - \theta_A) = 0 \quad \text{en } y^* = -1 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \theta_u}{\partial y^*} + Bi_1\theta_u = 0 \quad \text{en } y^* = 1 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \theta_u}{\partial y^*} - Bi_2 \theta_u = 0 \quad \text{en } y^* = -1 \quad (2.44)$$

Donde los números de Biot $Bi_1 = h_1 a / \kappa$ y $Bi_2 = h_2 a / \kappa$ son las expresiones adimensionales de los coeficientes convectivos de transferencia de calor de las paredes superior e inferior, h_1 y h_2 , respectivamente.

La solución de la temperatura estable θ_s es

$$\begin{aligned} \theta_s = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{k_1}{4} y^{*2} + \frac{k_2}{2} y^* + \frac{k_3}{8\beta^2} Ch[2\beta y^*] + \frac{k_4}{8\bar{\beta}^2} Ch[2\bar{\beta} y^*] + \frac{k_9}{4\beta^2} Sh[2\beta y^*] \right. \\ & + \frac{k_{10}}{4\bar{\beta}^2} Sh[2\bar{\beta} y^*] + \frac{k_5}{(\beta + \bar{\beta})^2} Ch[(\beta + \bar{\beta}) y^*] \\ & + \frac{k_6}{(\beta - \bar{\beta})^2} Ch[(\beta - \bar{\beta}) y^*] + \frac{k_7}{(\beta + \bar{\beta})^2} Sh[(\beta + \bar{\beta}) y^*] \\ & + \frac{k_8}{(\beta - \bar{\beta})^2} Sh[(\beta - \bar{\beta}) y^*] \\ & \left. + 2 \left\{ \frac{k_{11}}{\beta^2} Sh[\beta y^*] + \frac{k_{12}}{\bar{\beta}^2} Sh[\bar{\beta} y^*] + \frac{k_{13}}{\beta^2} Ch[\beta y^*] \right\} \right\} + C_1 y^* + C_2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Donde las constantes C_1 y C_2 , y la función k_i están en el Anexo.

La solución de la temperatura inestable θ_u es

$$\theta_u = (D_1 + D_3(y^*)) Sh[\omega y^*] + (D_2 + D_4(y^*)) Ch[\omega y^*] \quad (2.46)$$

Donde las constantes D_1 , D_2 y W , y las funciones D_3 y D_4 están en el Anexo

Las ecuaciones (2.45) y (2.46) forman parte de la ecuación (2.38) el cual nos describe el comportamiento térmico, pero dicha ecuación contiene una parte imaginaria cuyo valor no es de interés del trabajo, ya que importa la parte real de la solución; por lo tanto se debe encontrar el complejo conjugado de la expresión, es decir

$$\theta_R = \frac{\theta_u e^{2it^*} + \bar{\theta}_u e^{-2it^*}}{2} + \frac{\theta_s + \bar{\theta}_s}{2} \quad (2.47)$$

Finalmente, la ecuación (2.47) nos describe los perfiles de temperatura de un flujo oscilatorio MHD y se puede observar que es una función que depende de los parámetros que caracterizan al sistema, $\theta_R = f(M, R_\omega, \alpha_1, \alpha_2, Bi_1, Bi_2, Pr, \theta_A, y^*, t^*)$, y con ello se puede ver como las variables afectan al campo de temperatura, estos comportamientos se detallan en el Capítulo 3 del trabajo

2.6 Intensidad de Campo Eléctrico

El último término que se requiere para determinar la producción de entropía en el sistema MHD es la pérdida de energía útil por conducción eléctrica, es decir la densidad de corriente eléctrica. Para ellos se considera la ley de ohm visto en el capítulo 1.

Se debe tener en cuenta ciertas consideraciones que ya han sido mencionadas, el campo magnético, B_0 , existente únicamente fluye de manera transversal, es decir el vector magnético tiene las coordenadas $\mathbf{B} = [0, B_0, 0]$. El efecto del campo eléctrico es despreciable porque no se crea una polaridad de cargas que provoque que exista un campo eléctrico, por tanto $\mathbf{E} = [0, 0, 0]$. Por último, el fluido tiene únicamente componente axial, es decir el campo velocidad es $\mathbf{u} = [u(y), 0, 0]$, recordar que $u \neq u_0$, siendo u una ecuación de partes reales. Por lo tanto, el vector densidad de corriente eléctrica es

$$\mathbf{j} = \sigma(0, 0, uB_0) \quad (2.48)$$

Era de esperarse que la densidad de corriente sea en la componente z debido a que el producto cruz o el rotacional de dos campos debe tener como resultado un

vector perpendicular a ambos campos. Así pues, la densidad de corriente queda como (de manera escalar)

$$j_z = \sigma u B_0 \quad (2.49)$$

Teniendo en cuenta que $u^* = u/U_0$, $M = B_0 a \sqrt{\sigma/\eta}$ y $j_z^* = j_z a / U_0 \sqrt{\eta\sigma}$; son la velocidad adimensional, el número de Hartmann y la densidad de corriente eléctrica adimensional, respectivamente. Entonces

$$j_z^* = M u^* \quad (2.50)$$

La ecuación depende de la intensidad del campo magnético externo y de la velocidad del fluido que a su vez depende del mismo campo y de otros parámetros que caracterizan al sistema.

2.7 Generación de Entropía Local y Global

Para la determinación de la producción de entropía del sistema se debe comenzar con encontrar la producción local, para ello es necesario tener en cuenta las ecuaciones de Gibbs, balance de entropía, balance de energía y otras relaciones físicas como el vector conductividad (ley de Fourier) y el flujo de entropía $\nabla \cdot \mathbf{J}_s$, vistos en el Capítulo 1 de la presente,

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \dot{S} \quad (2.51)$$

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.52)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.53)$$

Multiplicando la ecuación (2.52) por ρ/T , y debido a que es un fluido incompresible (no existe variación de densidad en el tiempo) el segundo término de la derecha se desprecia, entonces

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\rho De}{T Dt} \quad (2.54)$$

comparando (2.54) con (2.51)

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \dot{S} = \frac{\rho De}{T Dt} \quad (2.55)$$

introduciendo la ecuación (2.53) en (2.55)

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \dot{S} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.56)$$

Aplicando la regla de vectores al primer término del lado derecho de la ecuación (2.56), queda:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f \quad (2.57)$$

donde f es un escalar y \mathbf{F} es un vector. Entonces el término se expresa

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{J}_q = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_q}{T} \right) = \frac{1}{T} (\nabla \cdot \mathbf{J}_q) + \mathbf{J}_q \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) \quad (2.58)$$

Operando el último término de la derecha de la ecuación (2.58) con la regla

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} \quad (2.59)$$

donde f y g son escalares. Entonces

$$\nabla\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\nabla T}{T^2} \quad (2.60)$$

e introduciendo la ecuación (2.60) en (2.58)

$$\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{J}_q) = \frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{J}_q) - \frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T \quad (2.61)$$

que es equivalente a

$$-\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{J}_q) = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{J}_q) - \frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T \quad (2.62)$$

Sustituyendo (2.62) en (2.56)

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \dot{S} = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{J}_q) - \frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.63)$$

Tomando en cuenta que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = \frac{1}{T}(\nabla \cdot \mathbf{J}_q) \quad (2.64)$$

La ecuación (2.63) queda

$$\dot{S} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.65)$$

Esta ecuación expresa la producción local de entropía para el flujo magnetohidrodinámico. En el primer término del lado derecho se considera la ley de Fourier del flujo de calor

$$\mathbf{J}_q = -\kappa \nabla T \quad (2.66)$$

Para el segundo término, la expresión para un fluido incompresible

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} = -\boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{u} \quad (2.67)$$

donde

$$\boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{u} = -\eta \Phi \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] &+ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Tomando en cuenta la ley de Ohm, el tercer término puede ser expresado como

$$\mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} \quad (2.70)$$

Sustituyendo las equivalencia en ecuación (2.65)

$$\dot{S} = \frac{1}{T^2} \kappa (\nabla T)^2 + \frac{1}{T} \eta \Phi + \frac{1}{T} \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} \quad (2.71)$$

Para el caso del estudio en la presente, se debe tomar en cuenta las consideraciones hechas en capítulos anteriores, es decir $T = f(y)$, $\mathbf{u} = [u(y), 0, 0]$, $\mathbf{B} = [0, B_0, 0]$, $\mathbf{E} = [0, 0, 0]$, así pues los términos de la derecha se reducen a

$$\kappa (\nabla T)^2 = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \quad (2.72)$$

$$\eta\Phi = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.73)$$

$$\frac{j^2}{\sigma} = \frac{j_z^2}{\sigma} \quad (2.74)$$

Por lo tanto

$$\dot{S} = \frac{1}{T^2} \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{T} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{T} \frac{j_z^2}{\sigma} \quad (2.75)$$

Normalizando \dot{S}^* por κ/a^2 y considerando las relaciones adimensionales vistas anteriormente, $\theta = \kappa T / \eta U_0^2$, $y^* = y/a$, $u^* = u/U_0$ y $j_z^* = j_z a / U_0 \sqrt{\eta \sigma}$, la producción local de entropía de forma adimensional

$$\dot{S}^* = \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right)^2 + \frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + \frac{1}{\theta} j_z^{*2} \quad (2.76)$$

Aquí se nota la importancia de primero conocer los campos de velocidad y temperatura, así como también la densidad de corriente eléctrica. La ecuación representa la tasa de producción local de entropía del sistema magnetohidrodinámico, el primer término es la pérdida de energía útil por conducción de calor, el segundo por fricción viscosa y el último por conducción eléctrica.

El siguiente paso es determinar la producción de entropía global, para ello hay que integrar (2.76) en todo el volumen del sistema y para el caso en particular que analizamos, también se debe integrar en un periodo de tiempo completo, es decir de 0 a 2π .

Retomando las siguientes igualdades de velocidad, temperatura y densidad de corriente eléctrica, vistas anteriormente $u^* = u_0^* e^{it^*}$, $\theta(y^*, t^*) = \theta_u(y^*) e^{2it^*} +$

$\theta_s(y^*)$, y $j_z^* = Mu_0^* e^{it^*}$, respectivamente. Entonces cada término de la ecuación (2.76) queda expresada como

$$\frac{1}{\theta^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\theta_u e^{2it^*} + \bar{\theta}_u e^{-2it^*}}{2} + \theta_s + \bar{\theta}_s \right)^2} \left(\frac{\frac{\partial \theta_u}{\partial y^*} e^{2it^*} + \frac{\partial \bar{\theta}_u}{\partial y^*} e^{-2it^*}}{2} + \frac{\partial \theta_s}{\partial y^*} + \frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial y^*} \right)^2 \quad (2.77)$$

$$\frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 = \frac{1}{\frac{\theta_u e^{2it^*} + \bar{\theta}_u e^{-2it^*}}{2} + \theta_s + \bar{\theta}_s} \left(\frac{\frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} e^{it^*} + \frac{\partial \bar{u}_0^*}{\partial y^*} e^{-it^*}}{2} \right)^2 \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{\theta} j_z^{*2} = \frac{1}{\frac{\theta_u e^{2it^*} + \bar{\theta}_u e^{-2it^*}}{2} + \theta_s + \bar{\theta}_s} \left(\frac{Mu_0^* e^{it^*} + \bar{M}u_0^* e^{-it^*}}{2} \right)^2 \quad (2.79)$$

Durante el cálculo de las ecuaciones, se encontró que el conjugado de la velocidad es igual a la velocidad adimensional, es decir

$$u_0^* = \bar{u}_0^* \quad (2.80)$$

Entonces las ecuaciones (2.79) y (2.80) quedan

$$\frac{1}{\theta} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 = \frac{1}{\frac{\theta_u e^{2it^*} + \bar{\theta}_u e^{-2it^*}}{2} + \theta_s} \left(\frac{\frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} e^{it^*} + \frac{\partial u_0^*}{\partial y^*} e^{-it^*}}{2} \right)^2 \quad (2.81)$$

$$\frac{1}{\theta} j_z^{*2} = \frac{1}{\frac{\theta_u e^{2it^*} + \bar{\theta}_u e^{-2it^*}}{2} + \theta_s} \left(\frac{Mu_0^* e^{it^*} + Mu_0^* e^{-it^*}}{2} \right)^2 \quad (2.82)$$

Integrando cada una de las expresiones con la ayuda de un programa matemático se determina la producción global de entropía para el sistema oscilatorio MHD.

Capítulo 3

Análisis de Resultados

3.1 Introducción

Las ecuaciones que describen el comportamiento térmico y dinámico del sistema, y la expresión local y global de entropía han sido determinadas en el capítulo anterior.

Describir los efectos de cada uno de los parámetros que caracterizan el sistema sobre los perfiles de velocidad y temperatura, así como sobre la producción de entropía, y encontrar condiciones óptimas con mínimos de entropía son el objeto de este capítulo de la investigación. A lo largo de todo el capítulo se comienza analizando desde el caso más simple hasta el más complejo, es decir primero se analiza un flujo hidrodinámico ordinario en un solo sentido (Poiseuille), luego un flujo oscilatorio ordinario, después un flujo MHD en un solo sentido (Hartmann) y por último el flujo oscilatorio MHD (Hartmann oscilatorio). Por lo tanto, en este capítulo se describe el comportamiento dinámico de los sistemas como primera parte, seguido del comportamiento térmico de estos y por último se estudia la entropía generada en el sistema con el objeto de optimizar el sistema buscando mínimos de esta última cantidad.

3.2 Comportamiento Dinámico

En la Figura 3.2.1 se describe el comportamiento dinámico de un flujo ordinario (Poiseuille), es decir sin presencia de campo magnético ni fuerza que permita oscilar el fluido; se pueden apreciar los efectos del coeficiente de deslizamiento en

el perfil de velocidad. Es fijado el valor de deslizamiento en la pared inferior a cero variando el deslizamiento en la parte superior y se observa cómo se desplaza el perfil de velocidad en la pared donde se considera el efecto del deslizamiento. El desplazamiento se debe a que al considerar el efecto del deslizamiento la fricción en tal pared disminuye por tanto se alcanzan valores mayores de velocidad con el incremento del coeficiente del deslizamiento.

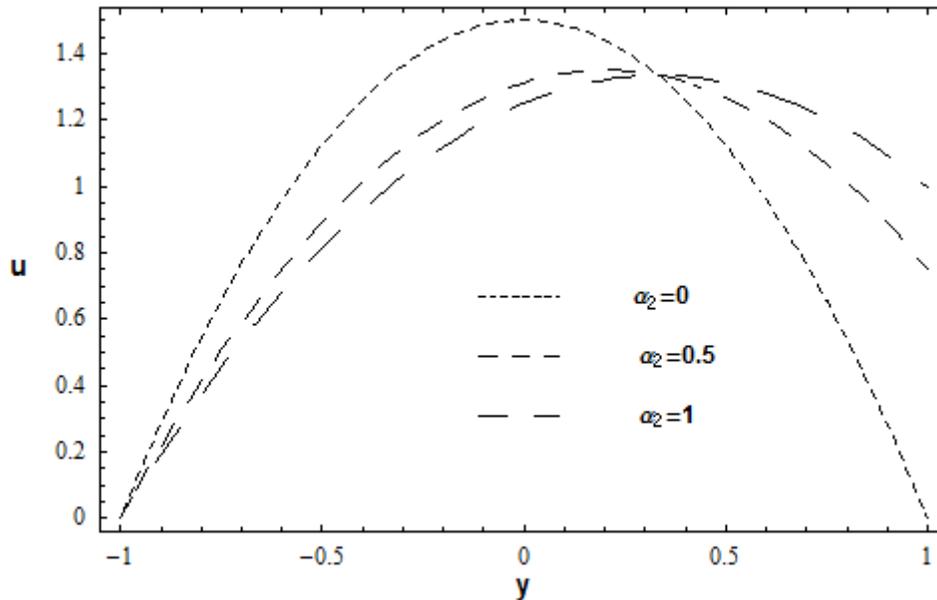


Figura 3.2.1. Perfil de velocidad del flujo de Poiseuille en función de la coordenada transversal del ducto para diferentes valores de α_2 , cuando el deslizamiento de la pared inferior, α_1 , es cero.

Al tomar en cuenta el mismo valor del deslizamiento en ambas paredes se obtiene un comportamiento simétrico en todo lo ancho del canal, se nota que cuando se aumenta el deslizamiento, las velocidades en las fronteras se desplazan a valores mayores a cero mientras que en el centro del canal se aprecia la disminución de la velocidad, ver Figura 3.2.2. En tal sentido el gradiente de velocidad disminuye lo cual influye en la producción entropía ya que la expresión de entropía depende del gradiente de velocidad, por tanto cualquier disminución o incremento del gradiente influye en las pérdidas de energía útil.

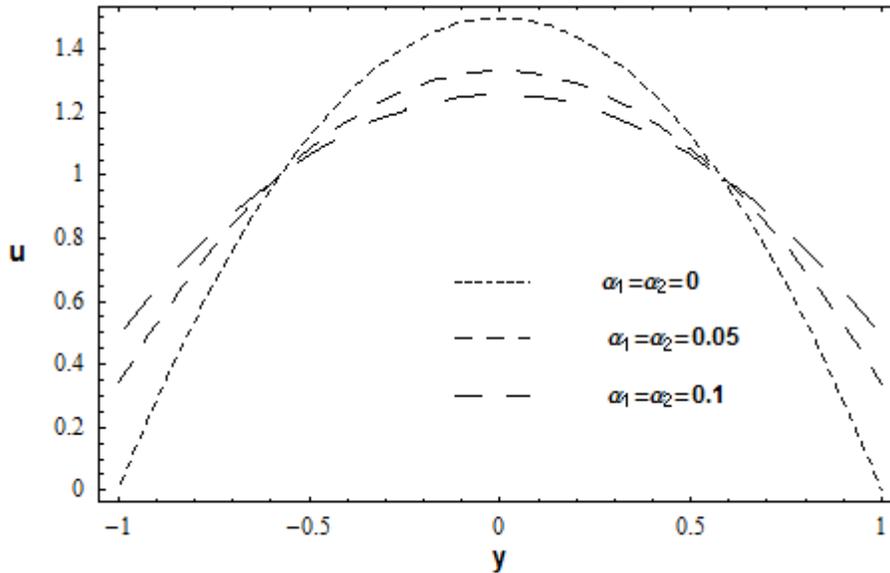


Figura 3.2.2. Perfil de velocidad del flujo de Poiseuille para diferentes valores de deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Una vez que ya se ha visto la influencia del deslizamiento en un flujo ordinario se espera obtener un comportamiento similar para un flujo oscilatorio, flujo magnetohidrodinámico y combinación de ambos, flujo oscilatorio MHD. Para el caso del flujo oscilatorio ordinario aparece un nuevo parámetro a tener en cuenta que es la frecuencia de oscilación la cual aparece incluida en el número adimensional de Reynolds oscilatorio (R_ω). Se puede ver en la Figura 3.2.3 el efecto que tiene el aumento de la frecuencia de oscilación del fluido sobre la velocidad del fluido. Se obtienen máximos de velocidad en los extremos y mínimos en el centro del canal. También puede notarse que estos máximos tiene el mismo valor de velocidad y que la intensificación de R_ω hace los extremos más pronunciados.

Tal comportamiento del flujo oscilatorio es debido a que el fluido se mueve hacia los dos sentido del canal y se comporta como un armónico. El gradiente de velocidad aumenta cuando se incrementa la frecuencia de oscilación, lo cual provoca mayores pérdidas cuando se considera éste parámetro.

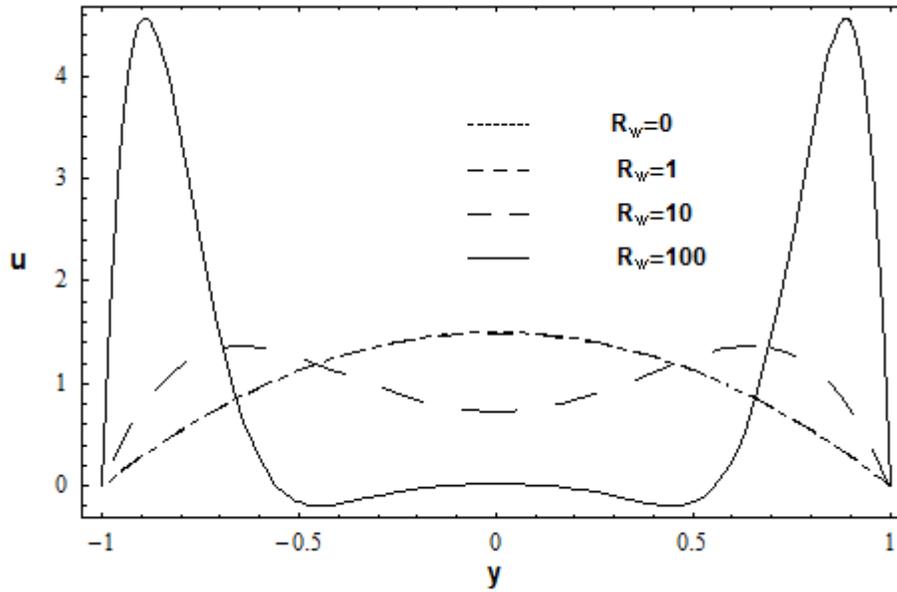


Figura 3.2.3. Campo de velocidad del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de R_ω , cuando los deslizamientos son cero, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Cuando aplicamos el deslizamiento en un lado de la pared, para el caso de la Figura 3.2.4 la pared superior, se mantienen dos máximos en los extremos y mínimos en el centro del canal pero estos máximos son distintos en comparación del caso anterior donde ambos eran iguales, en este caso la pared en la cual es aplicado el deslizamiento tiene menor valor de la velocidad. Además, en el lado donde es aplicado dicho efecto no llega a tomar el valor cero de velocidad comparado con el caso en que no se aplica el deslizamiento.

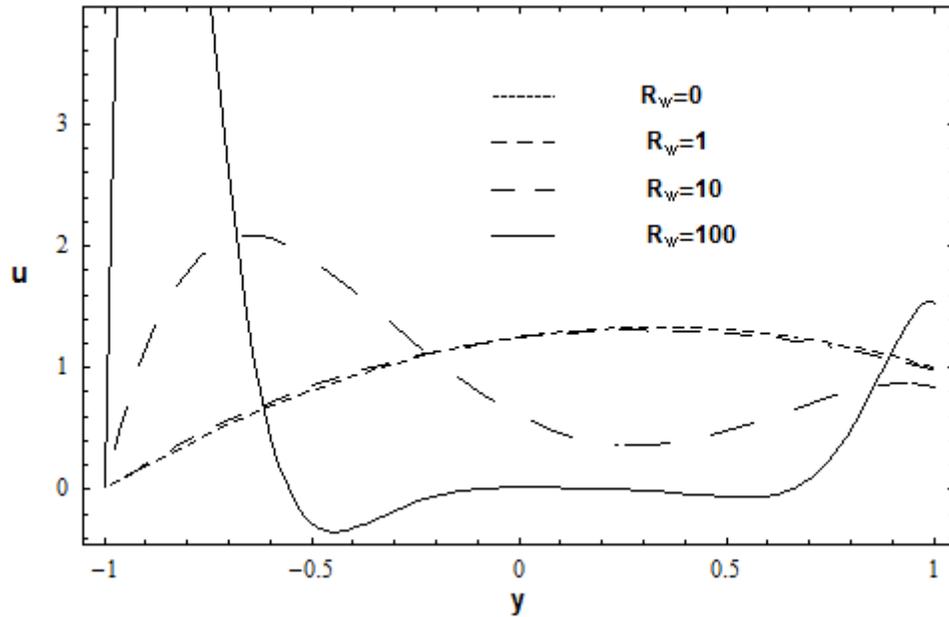


Figura 3.2.4. Campo de velocidad del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de R_ω , cuando los deslizamientos en las paredes son $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = 0$.

La última observación mencionada arriba es apreciada cuando es considerado el deslizamiento en las dos paredes, es decir los valores de velocidad en las paredes son distintas a cero y los extremos de la función se mantienen, ver Figura 3.2.5.

La presencia del deslizamiento en el flujo oscilatorio hace que el gradiente de velocidad disminuya cerca de las fronteras mientras que en el centro se mantiene el mismo comportamiento analizado anteriormente.

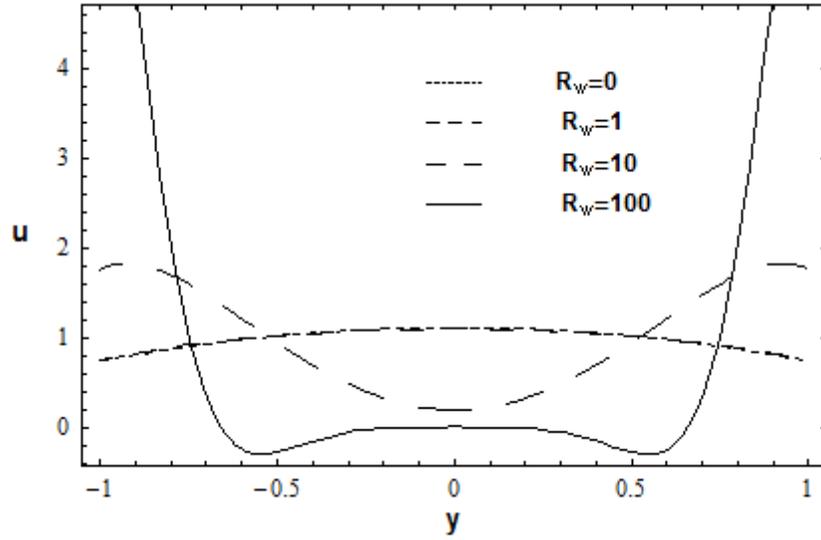


Figura 3.2.5. Campo de velocidad del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de R_ω , cuando los deslizamientos son iguales a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Los siguientes análisis serán relacionados al flujo MHD, el principal efecto que tiene la presencia de un campo magnético es aplanar los perfiles de velocidades del sistema, cuya observación ha sido notado en otras investigaciones y se obtuvo gráfica similar a la Figura 3.2.6.

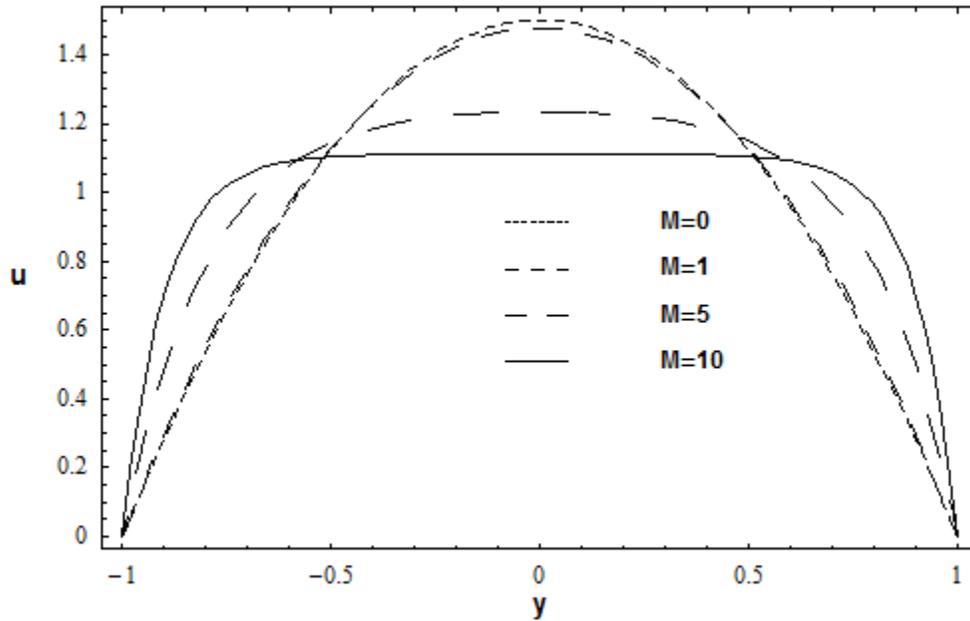


Figura 3.2.6. Campo de velocidad del flujo MHD para distintos valores de M , cuando los deslizamientos son cero, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

De la Figura 3.2.7, al tomar en cuenta el deslizamiento sólo en la parte superior los valores de velocidad de la pared del flujo MHD es mayor a cero.

Mismo efecto sucede cuando el deslizamiento es aplicado en ambas paredes, los valores en las paredes son mayores a cero y en dependencia de la intensidad del campo se determinará el valor en la pared, por ejemplo cuanto más intenso sea el campo mayor es el valor de la velocidad en las paredes, ver Figura 3.2.8.

A partir de este punto, se tomará en cuenta que la intensidad del campo magnético es el parámetro que variamos dentro de la expresión de M , entonces se puede decir que con el incremento del campo magnético se obtiene disminución en el gradiente de velocidad y la presencia del efecto del deslizamiento hace que el gradiente disminuya cerca de las paredes.

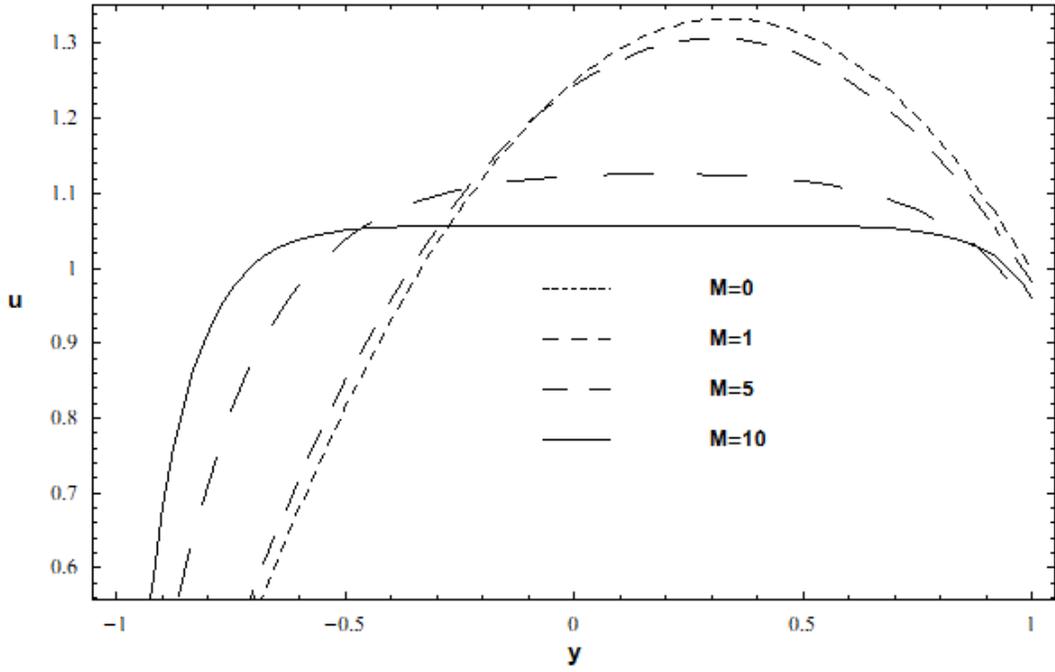


Figura 3.2.7. Campo de velocidad del flujo MHD para distintos valores de M , cuando los deslizamientos en las paredes son $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = 0$.

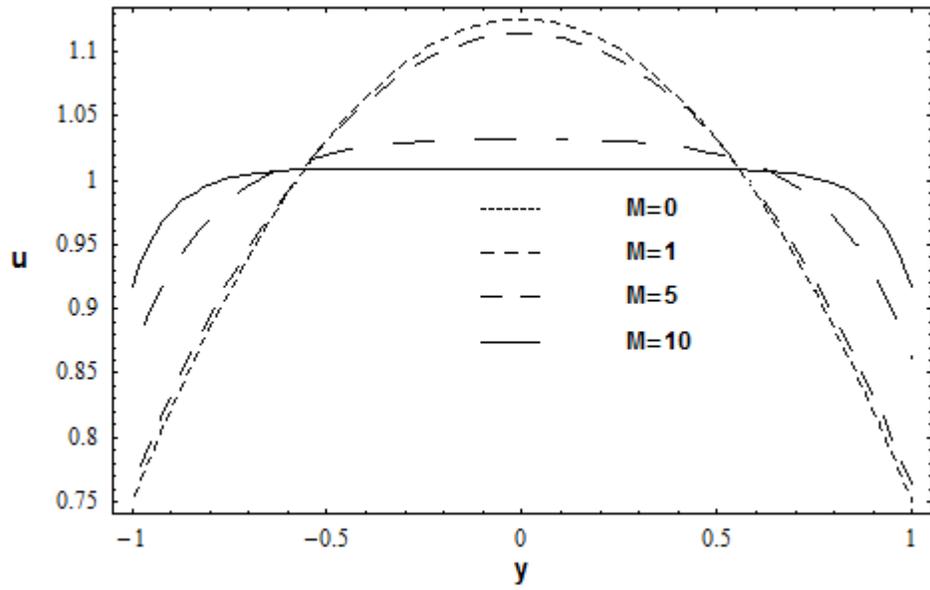


Figura 3.2.8. Campo de velocidad del flujo de Hartmann para distintos valores de M , cuando los deslizamientos son iguales a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Realizados el análisis de cada uno de los sistemas que se derivan del flujo oscilatorio MHD (ordinario, MHD y oscilatorio) se procede al sistema de interés. En las dos gráficas de abajo se describe el efecto de la oscilación del fluido y el campo magnético externo aplicado. Para el flujo oscilatorio en ausencia del campo magnético el perfil de velocidad es como en de la Figura 3.2.3. Sin embargo, cuando se aplica un campo magnético de determinada magnitud el perfil se aplana. Esto indica que para valores de M y R_ω utilizados el efecto provocado por la fuerza de Lorentz predomina sobre el gradiente de presión oscilatorio que hace que el fluido oscile.

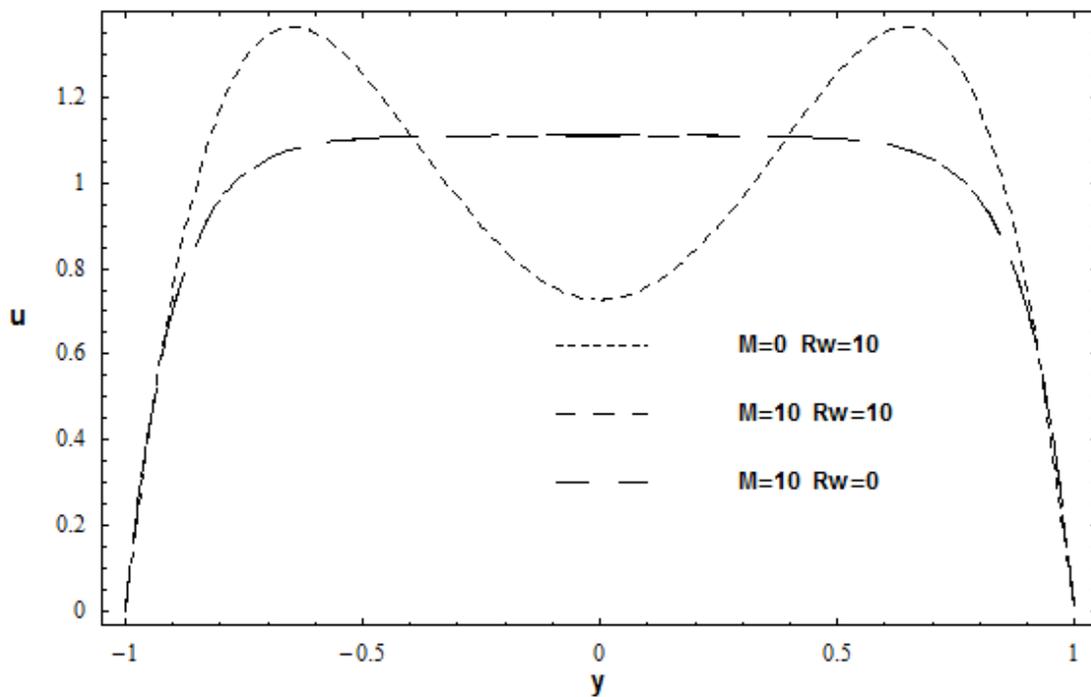


Figura 3.2.9. Perfiles de velocidad del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de M y R_ω , cuando los deslizamientos son cero, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

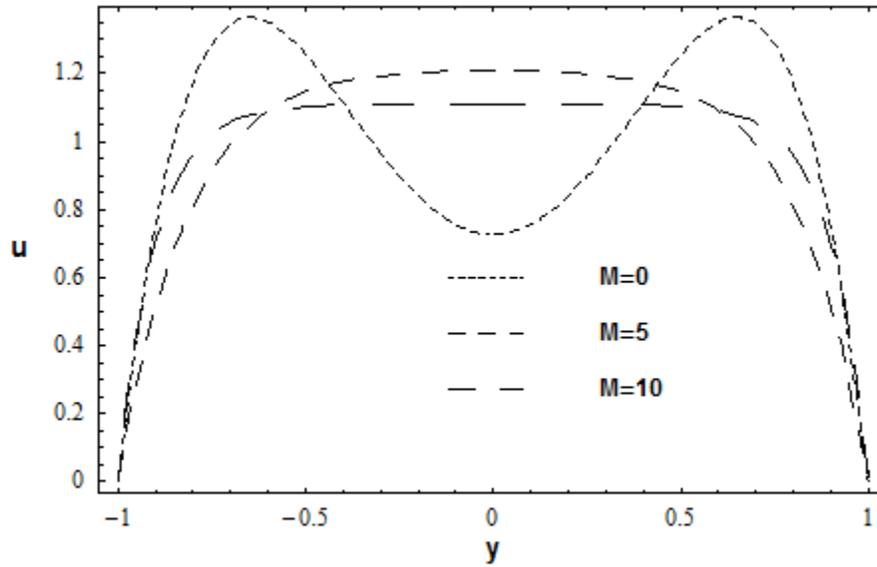


Figura 3.2.10. Perfiles de velocidad del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de M cuando los deslizamientos son cero, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $R_\omega = 10$.

La aplicación del efecto de deslizamiento, también conocido como efecto Slip, al sistema en las paredes sucede lo mismo que se observó en los otros casos anteriores, las velocidades en las paredes son mayores a cero, ver Figura 3.2.11.

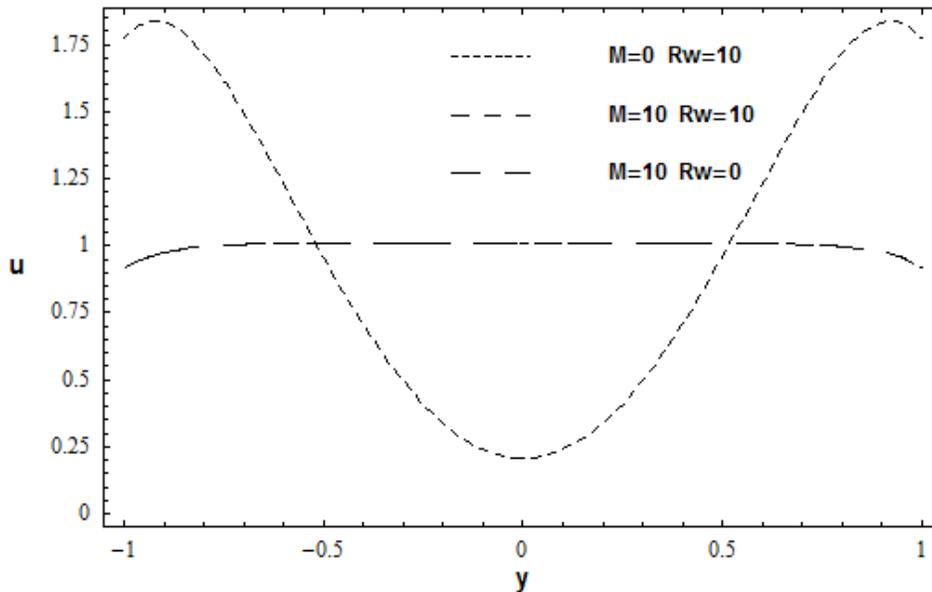


Figura 3.2.11. Campo de velocidad del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de M y R_ω , cuando los deslizamientos son iguales a $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

De la Figura 3.2.12 se puede decir que el Reynolds oscilatorio afectará con mayor intensidad el comportamiento dinámico siempre y cuando sea mucho mayor el valor del campo magnético.

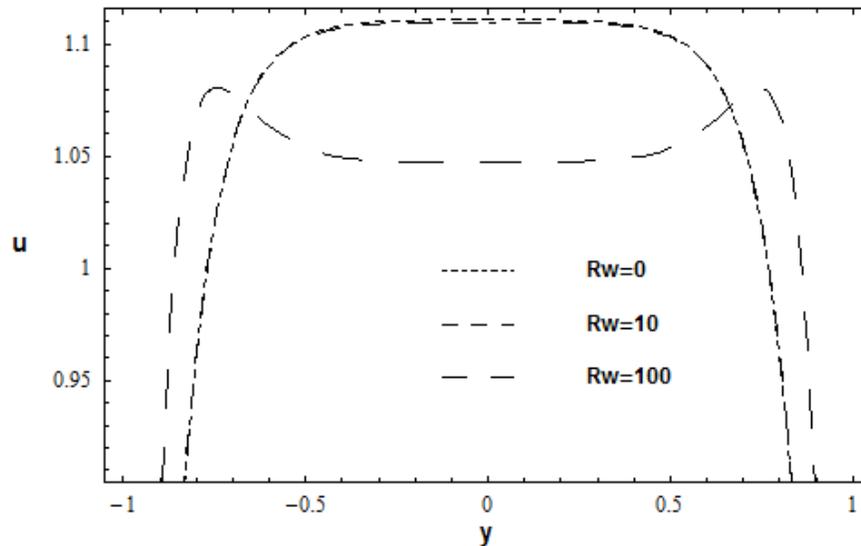


Figura 3.2.12. Perfiles de velocidad del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de R_ω , cuando los deslizamientos son $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $M = 10$.

3.3 Comportamiento Térmico

De la misma manera que el análisis del comportamiento dinámico, se describe el efecto de los parámetros que caracterizan al sistema ordinario, oscilatorio, magnetohidrodinámico y oscilatorio MHD sobre los campos de temperatura. En el caso del flujo ordinario se observa una disminución simétrica de temperatura en todo el canal con el aumento del número de Biot teniendo la mayor temperatura concentrada en el centro del sistema, ver Figura 3.3.1, esto se debe por que el número de Biot cuantifica la cantidad de calor por convección transferida hacia el

medio, cuando mayor es el valor de Bi mayor transferencia de energía hacia el medio existe, por tanto la temperatura cerca de las paredes disminuyen.

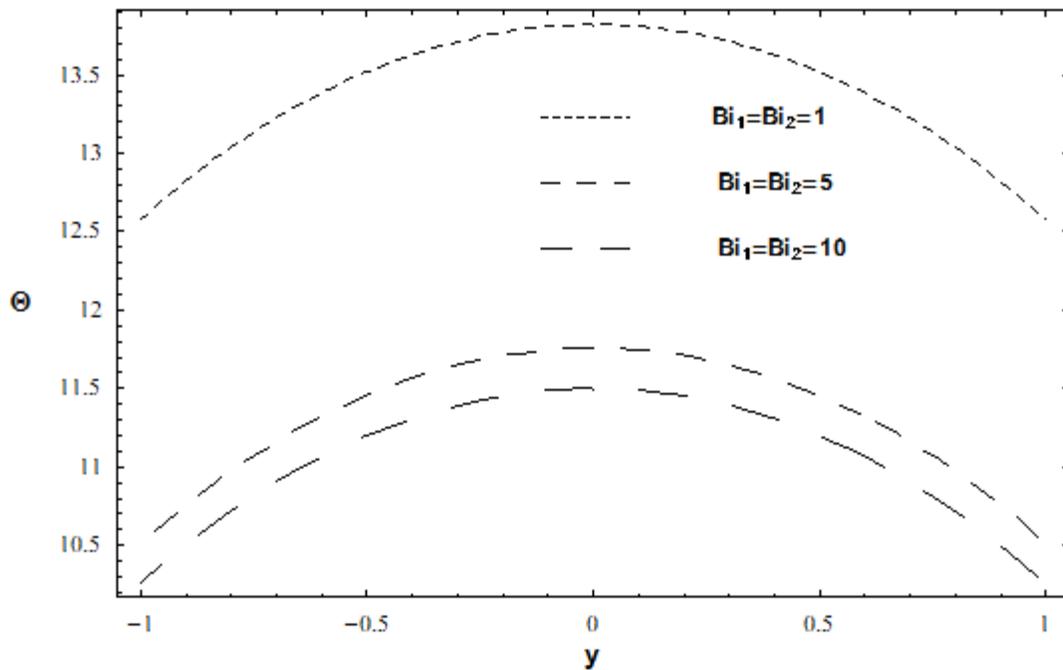


Figura 3.3.1. Campo de temperatura del flujo ordinario sin deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, para valores distintos de Biot, $Bi_1 = Bi_2$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

De la Figura 3.3.2, cuando los números de Biot son distintos en las paredes, el lado donde el coeficiente de transferencia es mayor la temperatura es menor que la otra por las razones explicadas arriba, además, para los valores considerados en la gráfica, Biot iguales en los bordes dan menores temperaturas tanto en los extremos como en el centro del canal, comparándolo con Biot diferentes en las fronteras, ya que el valor de transferencia de calor hacia el medio son menores a los otros dos.

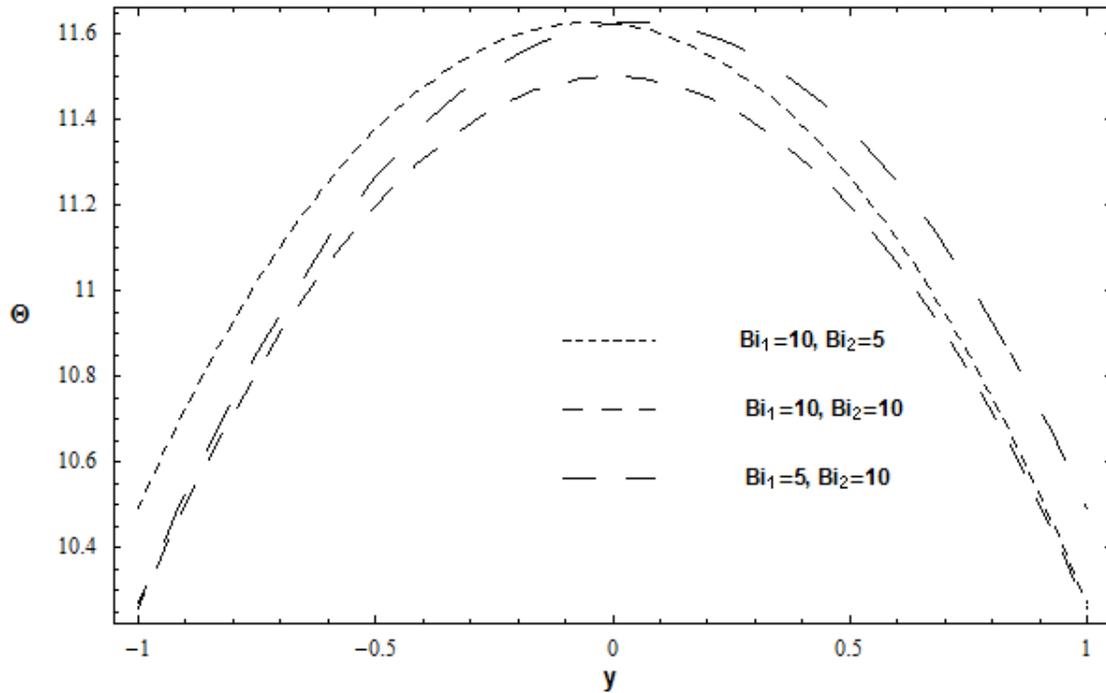


Figura 3.3.2. Campo de temperatura del flujo ordinario sin deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, para valores distintos de Biot en las fronteras, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Si el deslizamiento es aplicado en una sola pared, el perfil de temperatura comienza a disminuir suavemente conforme el aumento del coeficiente de deslizamiento o coeficiente Slip, desplazando el máximo de temperatura hacia el lado donde no se aplica el efecto y no en el centro como es acostumbrado, ver Figura 3.3.3, ya que si hay deslizamiento debe haber menor disipación viscosa y por tanto menos incremento en temperatura del fluido debido a ello.

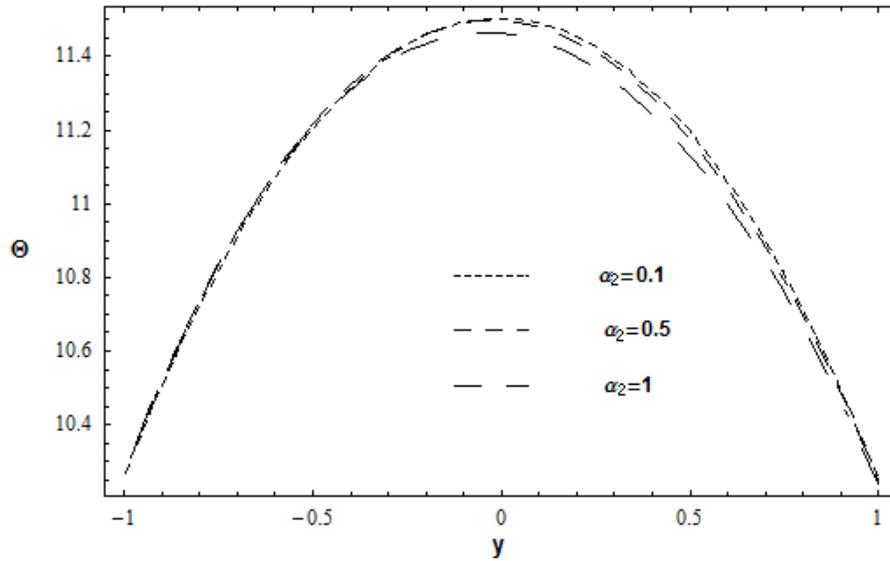


Figura 3.3.3. Campo de temperatura del flujo ordinario con distinto valores de deslizamiento en la pared superior, α_2 , cuando $\alpha_1 = 0, Bi_1 = Bi_2 = 10, Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Para observar claramente el efecto de desplazamiento del máximo de temperatura se muestra en la Figura 3.3.4 donde se considera el deslizamiento con distintas escalas.

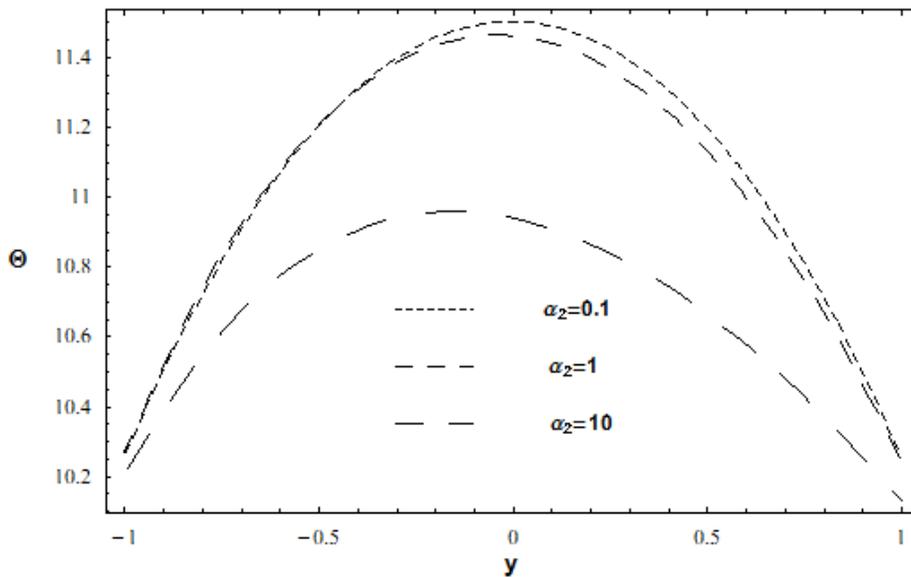


Figura 3.3.4. Campo de temperatura del flujo ordinario con distinto valores de deslizamiento en la pared superior, α_2 , cuando $\alpha_1 = 0, Bi_1 = Bi_2 = 10, Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Considerando los valores de deslizamiento iguales en ambas paredes, se aprecian 1) un comportamiento simétrico manteniendo el máximo en el centro y 2) los perfiles de temperatura disminuyen significativamente con el aumento del coeficiente, ver Figura 3.3.5, de tal manera es notable la disminución del gradiente de temperatura con el aumento simétrico del coeficiente del deslizamiento, por lo cual se espera la disminución de la generación de entropía en el sistema, ya que en la expresión de entropía contiene, además del gradiente de velocidad, gradiente de temperatura.

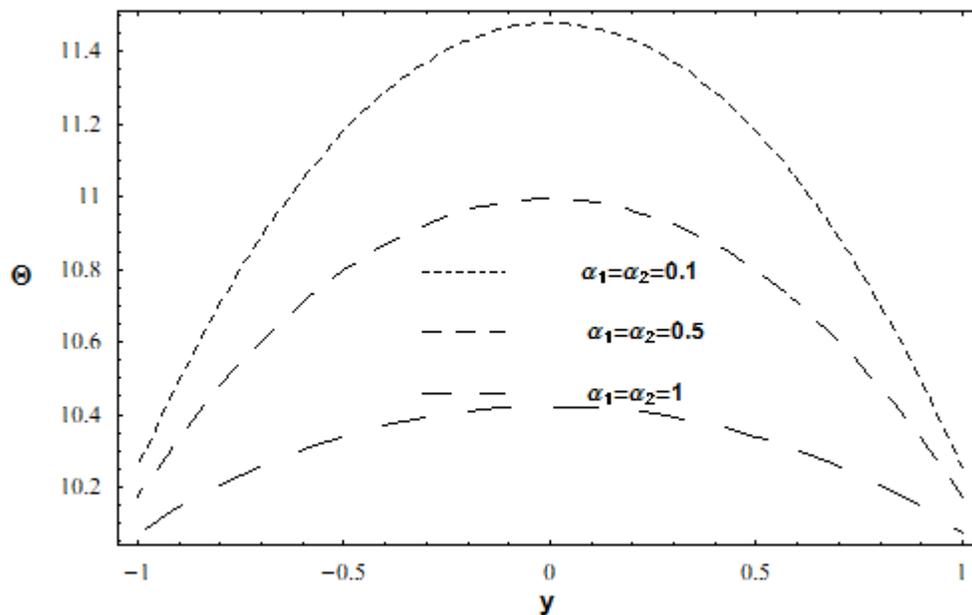


Figura 3.3.5. Campo de temperatura del flujo ordinario par distintos valores de deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$. $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Si los Biot son distintos en las paredes y se toma en cuenta el deslizamiento donde el valor de Biot es menor resulta una disminución de temperatura en el sistema, ver Figura 3.3.6, debido a la disipación viscosa.

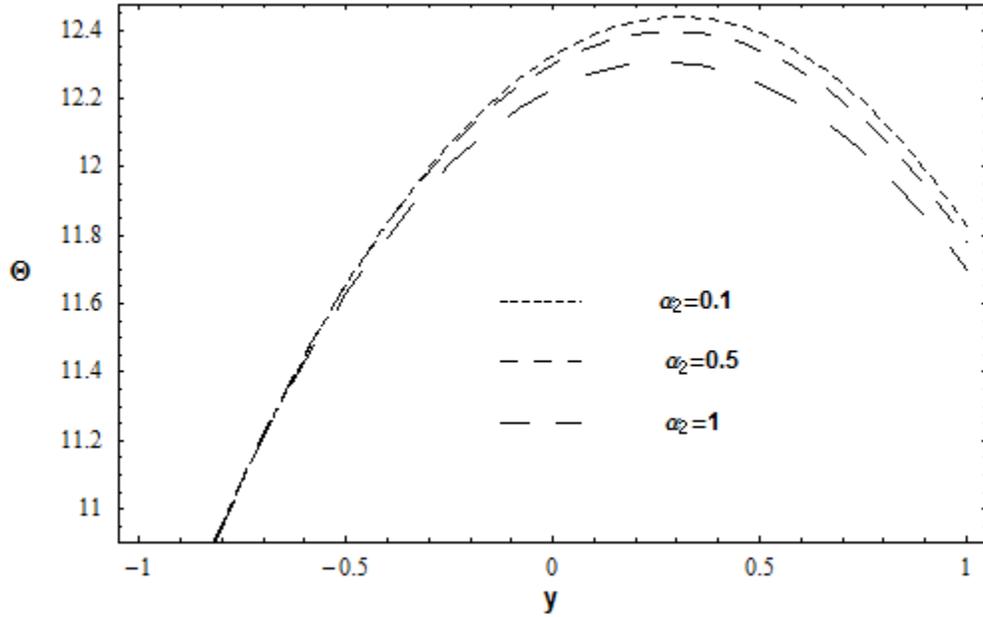


Figura 3.3.6. Campo de temperatura del flujo ordinario con distintos valores de deslizamiento de la pared superior para diferentes valores de Biot, $Bi_1 = 1, Bi_2 = 10$, $\alpha_1 = 0, Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Caso contrario sucede cuando se aplica el deslizamiento del lado donde el coeficiente de transferencia es mayor que el otro, la temperatura aumenta en el sistema con el aumento del efecto de deslizamiento, ver Figura 3.3.7.

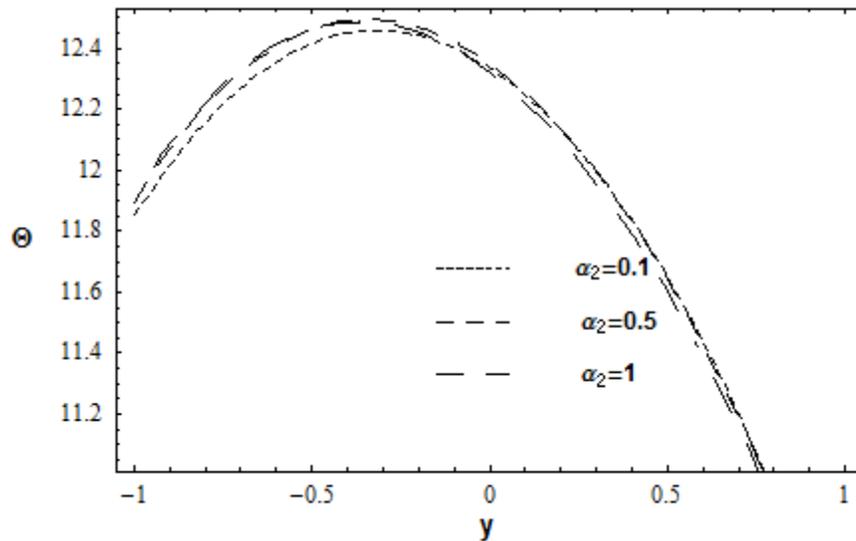


Figura 3.3.7. Campo de temperatura del flujo ordinario con distintos valores de deslizamiento de la pared superior para diferentes valores de Biot, $Bi_1 = 10, Bi_2 = 1$, $\alpha_1 = 0, Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

En la Figura 3.3.8 se puede ver que cuando el deslizamiento de ambas paredes son iguales para el sistema ordinario las temperaturas disminuyen significativamente con el aumento del efecto del deslizamiento debido a lo explicado anteriormente.

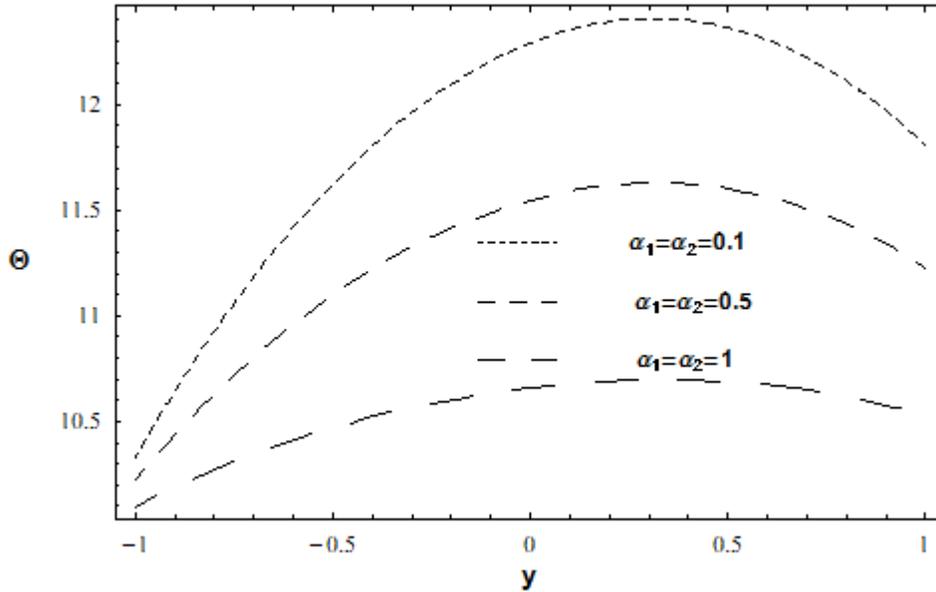


Figura 3.3.8. Campo de temperatura del flujo ordinario con distintos valores de deslizamiento de ambas paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$, para diferentes valores de Biot, $Bi_1 = 1, Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Con la existencia de R_ω , los perfiles de velocidad y temperatura tienden a ser oscilatorio ya que en él existe una parte armónica. El incremento de oscilación del fluido nos da un aumento de temperatura en todo el canal, obteniendo un comportamiento parecido al dinámico que de igual manera tiene dos máximos cerca de los extremos y mínimos en el centro, ver Figura 3.3.9, debido a que la expresión de temperatura contiene una parte del campo de velocidad. Dicho aumento de temperatura se debe a que el número de Reynolds oscilatorio depende directamente de la velocidad angular, es como incrementar la velocidad del fluido por tanto existe una mayor disipación viscosa en el canal.

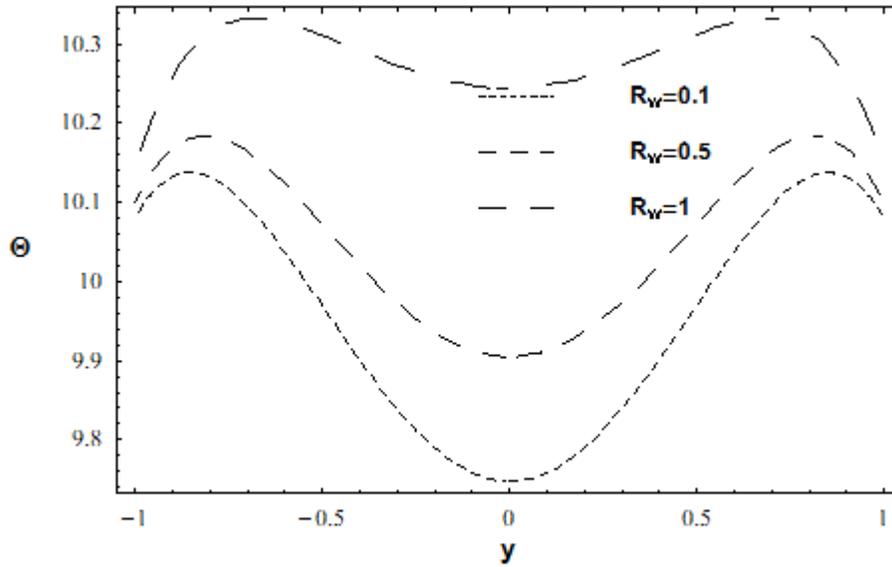


Figura 3.3.9. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de R_w sin deslizamiento en las paredes, $Bi_1 = Bi_2 = 10$ $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

En la Figura 3.3.10 se puede observar que a valores distintos de transferencia de calor hacia el medio producen temperaturas mayores en la pared donde el valor de Biot es menor conservando los extremos de la función (máximos y mínimos).

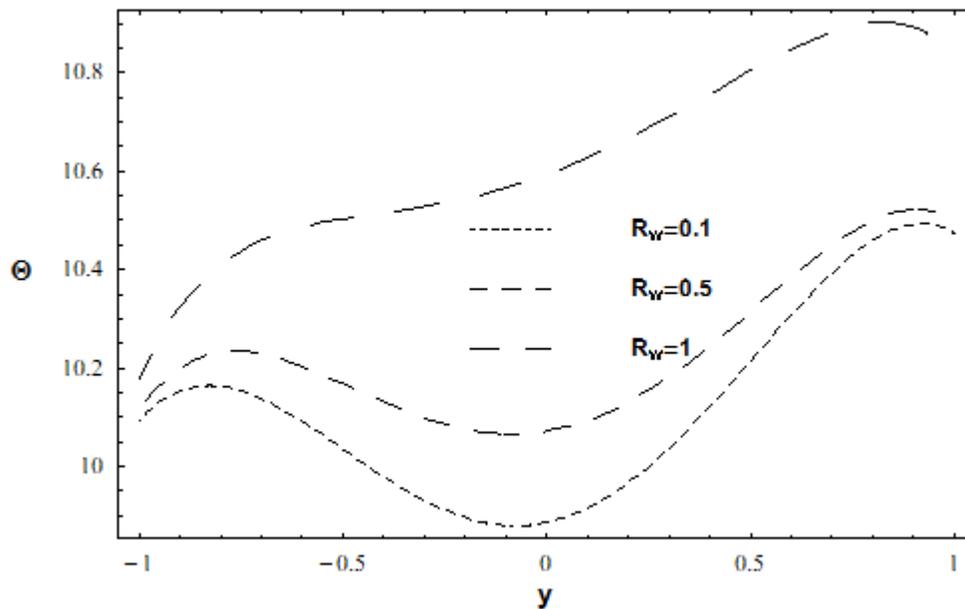


Figura 3.3.10. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de R_w sin deslizamiento en las paredes para distintos valores de Biot, $Bi_1 = 1, Bi_2 = 10$ $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

De la Figura 3.3.11, el efecto de deslizamiento en las paredes se refleja significativamente en el campo de temperatura ya que cuando los deslizamientos son iguales los extremos de la función desaparecen generando un único extremo, es obtenido un comportamiento casi uniforme.

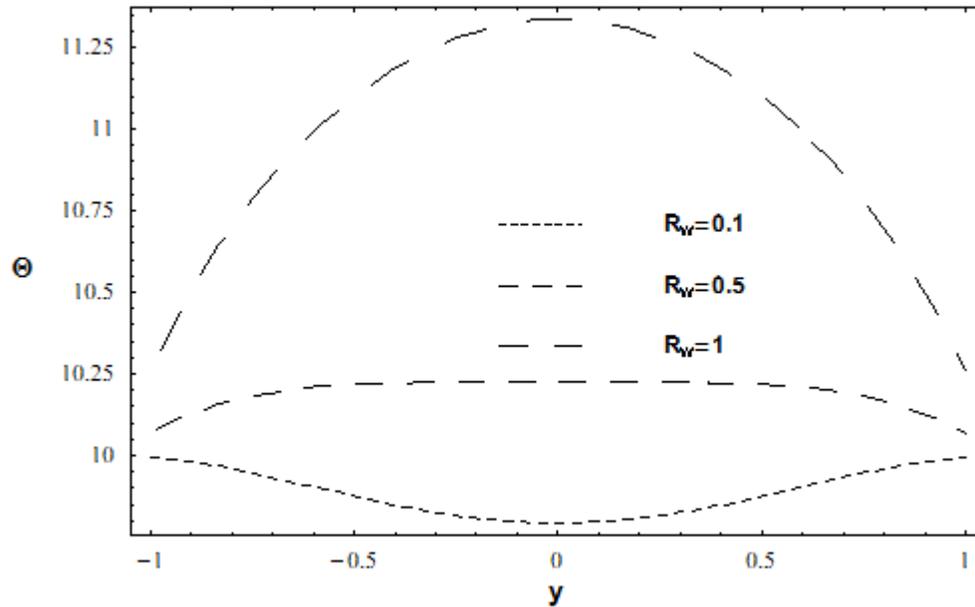


Figura 3.3.11. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de R_w con deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Si el deslizamiento es aplicado en una sola pared la temperatura de dicha frontera es menor que la otra (Figura 3.3.12) debido a la disminución de fricción en la pared.

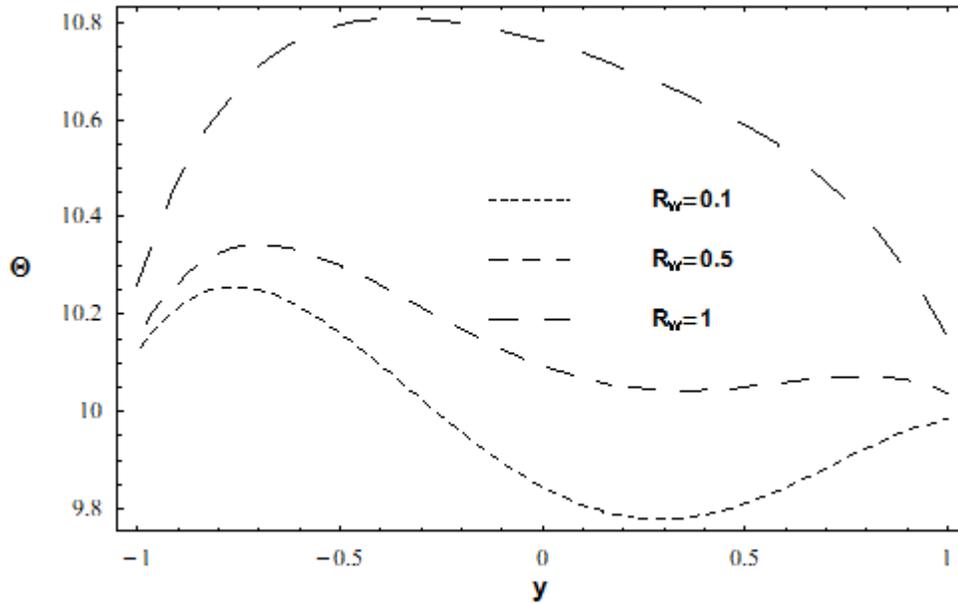


Figura 3.3.12. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de R_w con valores de deslizamiento distinto en las paredes, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.5$. $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Para el flujo oscilatorio, el efecto principal del deslizamiento en ambas paredes es transformar la función en una parabólica, mientras aumenta el deslizamiento los extremos se desvanecen convirtiéndose en una sola. En la Figura 3.3.13 puede verse que con el incremento del valor del coeficiente del deslizamiento incrementa los valores de temperatura sobre todo el canal, este resultado es distinto a lo que ha venido observando. El incremento del deslizamiento conlleva a la disminución de la temperatura. Esto se debe a que cuando se incrementa el deslizamiento los valores de velocidad se incrementan en las paredes pero en el centro del canal disminuyen con mayor intensidad lo cual provoca el incremento del gradiente de velocidad por tanto la disipación viscosa que está relacionada con dicho gradiente aumenta y esto a su vez produce el aumento de temperatura.

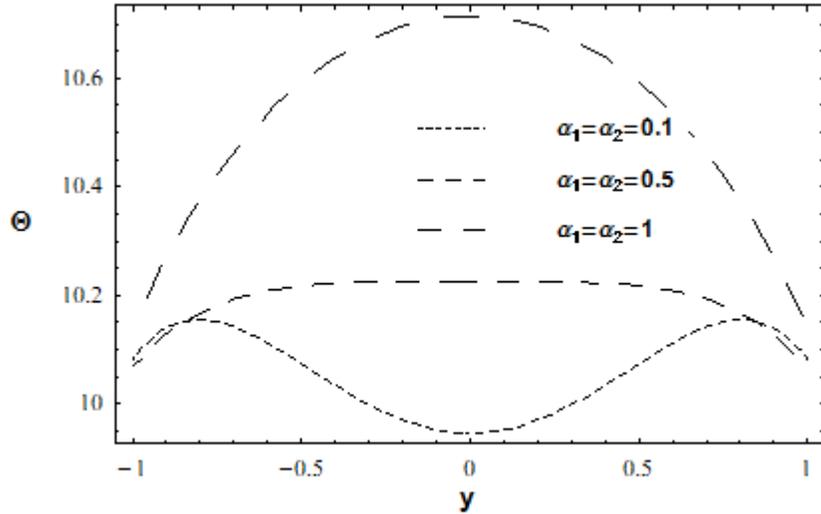


Figura 3.3.13. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$. $R_\omega = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Se observa lo mismo en la Figura 3.3.14, los extremos de la temperatura se transforman en una única mientras aumenta el deslizamiento en una pared y la temperatura donde el efecto está presente es mucho menor que el otro.

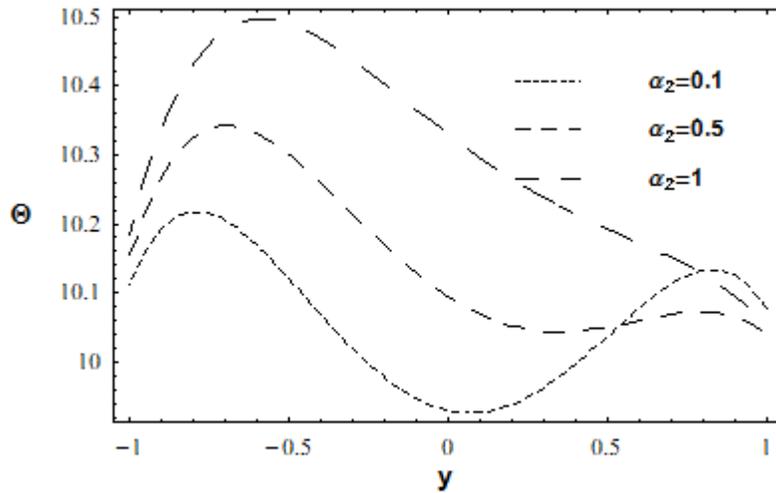


Figura 3.3.14. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de deslizamiento superior, α_2 , cuando $\alpha_1 = 0$, $R_\omega = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

La temperatura en un flujo MHD se comporta de manera uniforme en todo el canal con máximo en el centro. En el aumento de la intensidad del campo magnético la temperatura en el sistema disminuye, ver Figura 3.3.15.

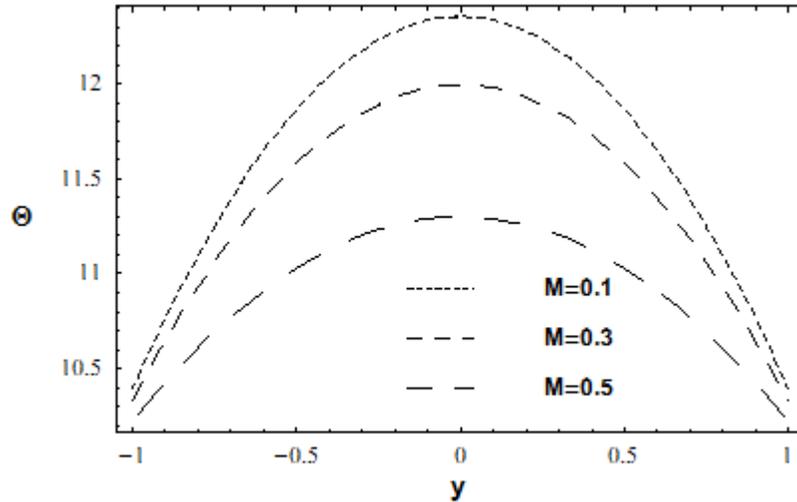


Figura 3.3.15. Perfil de temperatura del flujo MHD para distintos valores de M sin deslizamiento en las paredes, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

La aplicación del efecto del deslizamiento, ya sea en una sola pared o en ambas con valores iguales, nos da una disminución de temperatura en todo el canal, ver Figuras 3.3.16 y 3.3.17.

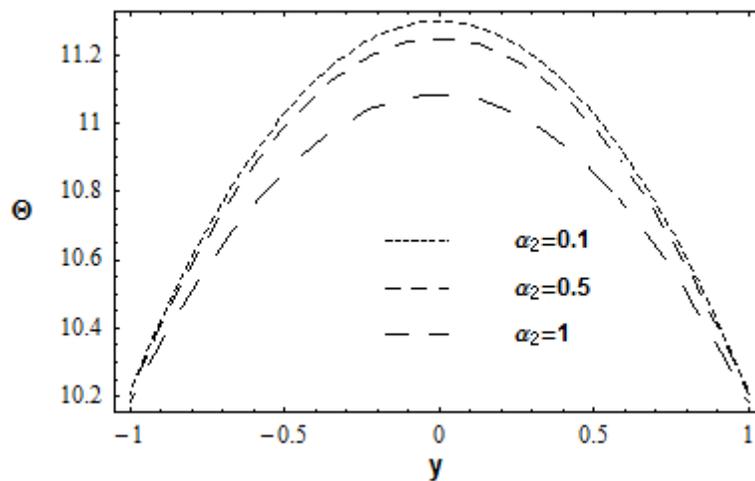


Figura 3.3.16. Perfil de temperatura del flujo MHD para distintos valores de deslizamiento α_2 cuando $\alpha_1 = 0$, $M = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

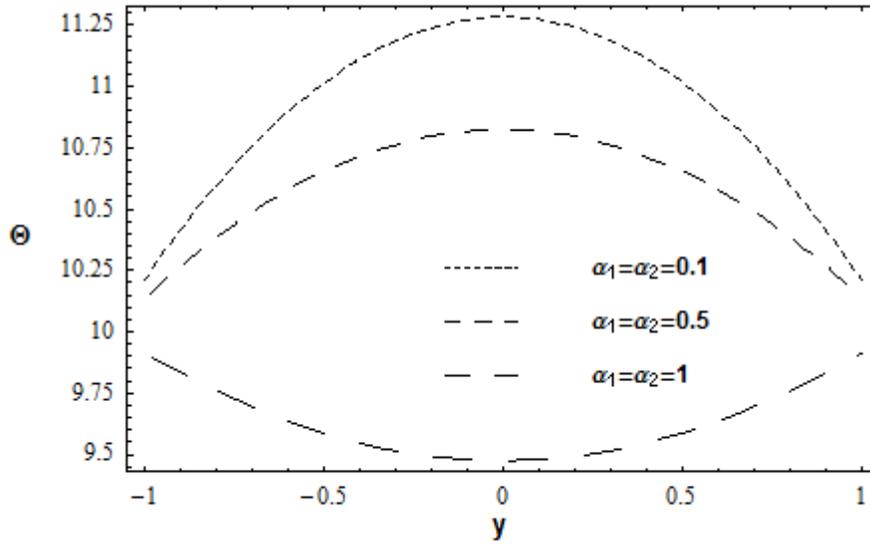


Figura 3.3.17. Perfil de temperatura del flujo MHD para distintos valores de deslizamiento en las paredes $\alpha_1 = \alpha_2$, $M = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Los comportamientos de los demás sistemas han sido analizados para compararlo con el sistema de interés. En la Figura 3.3.18 se ve que disminuye la temperatura cuando un flujo MHD se le permite oscilar el fluido dentro del canal provocando máximo de temperatura en el centro, mientras que cuando un flujo oscilatorio se le aplica campo magnético externo aumenta la temperatura del sistema uniformemente dejando los extremos solamente en el centro del canal; esta observación se ha venido mencionando en los otros casos analizados.

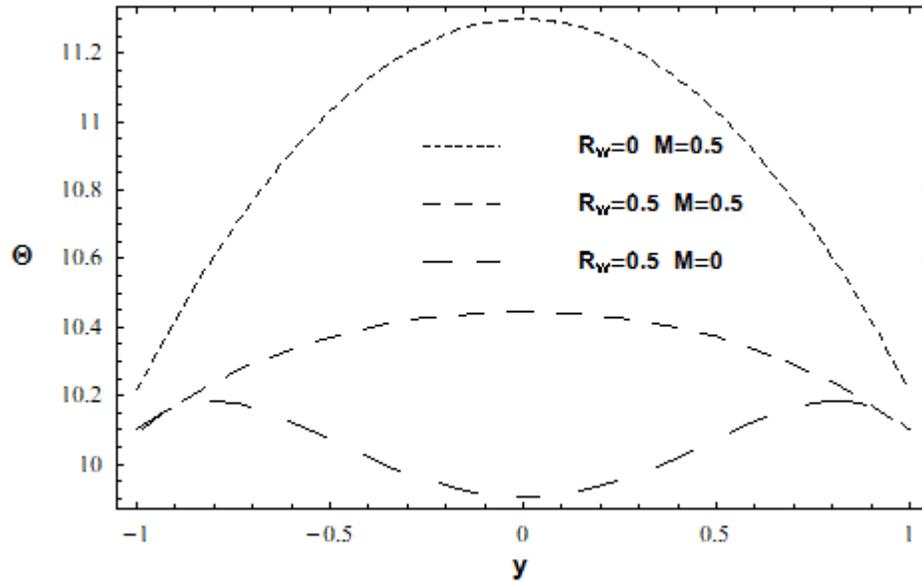


Figura 3.3.18. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de M y R_w sin deslizamiento en las paredes, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

El deslizamiento afecta significativamente en el perfil de velocidad del flujo oscilatorio MHD disminuyendo la temperatura en el sistema ya sea cuando los deslizamiento son iguales o cuando es aplicado en una única pared pero se pueden obtener menores valores de temperatura cuando los coeficientes son iguales en las fronteras, ver Figuras 3.3.19 y 3.3.20.

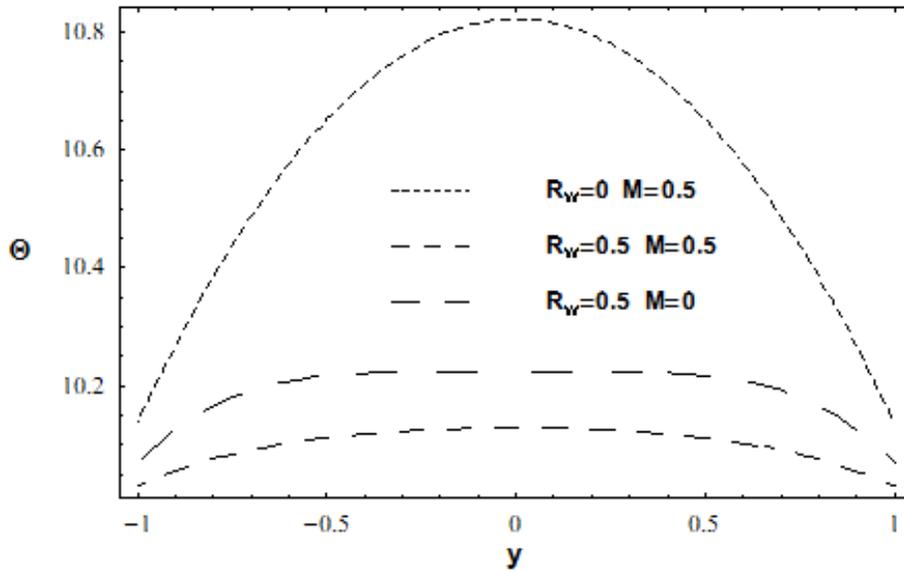


Figura 3.3.19. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de M y R_ω con deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

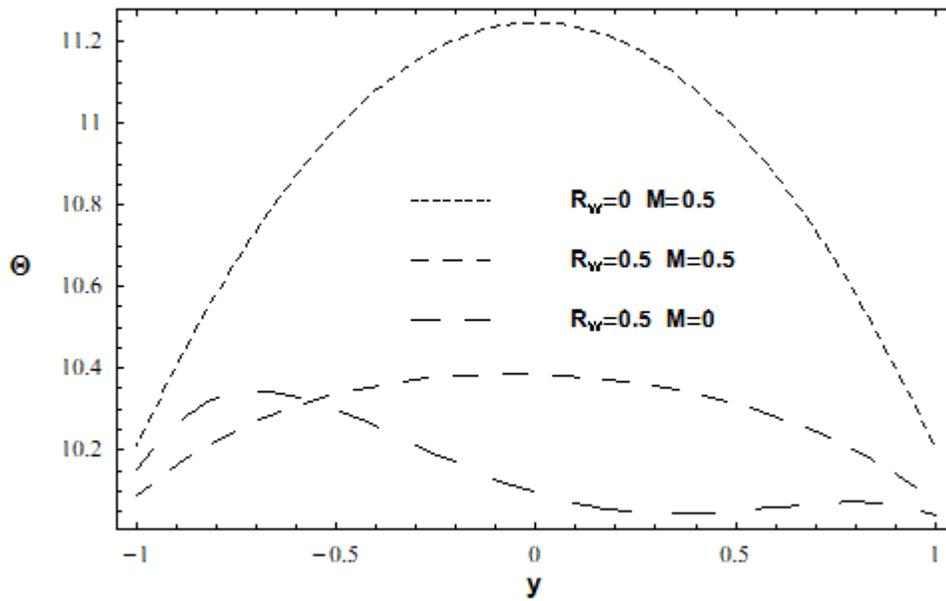


Figura 3.3.20. Perfil de temperatura del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de M y R_ω con deslizamiento en la pared superior, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $Bi_1 = Bi_2 = 10$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

3.4 Producción de Entropía

En el flujo ordinario, Figura 3.4.1, se puede ver que cuando se aumenta el deslizamiento en las paredes la entropía disminuye con mayor intensidad cerca de las fronteras esto sucede debido a que disminuye la fricción en las paredes mientras el efecto de deslizamiento aumenta.

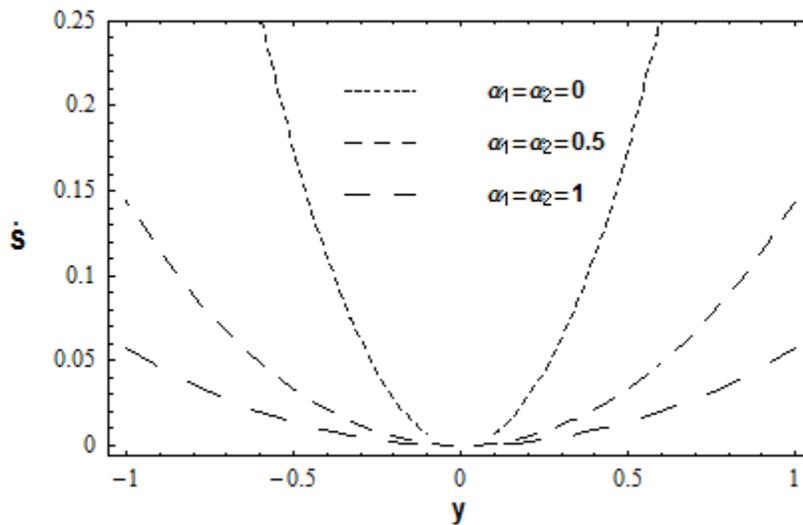


Figura 3,4.1. Producción de entropía local del flujo de Poiseuille para distintos valores de deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$. $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Cuando el valor de deslizamiento es fijo en una pared y se varía el correspondiente a la otra pared se observa que disminuye la entropía local del otro lado de la pared con una baja intensidad si se aumenta el deslizamiento, ver Figura 3.4.2.

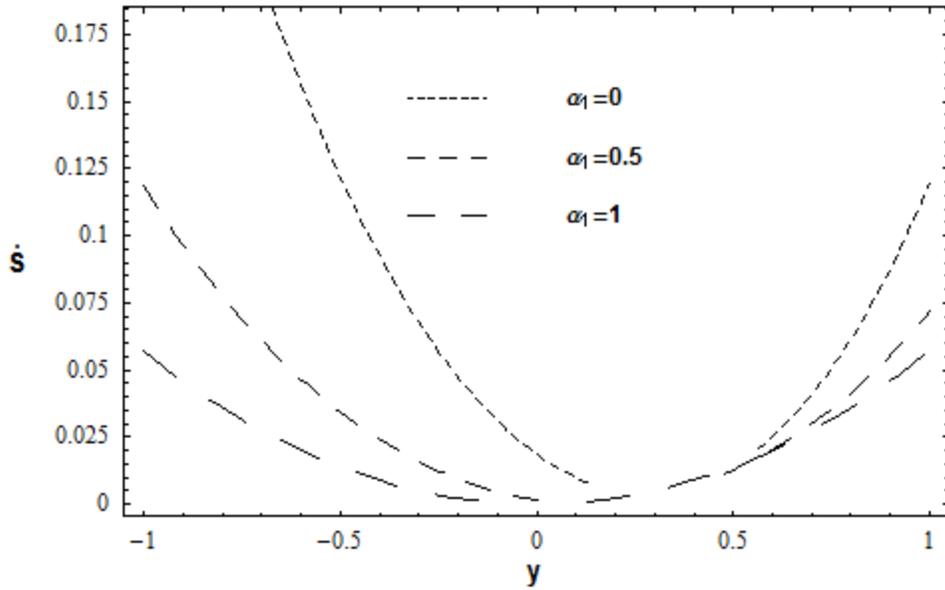


Figura 3.4.2. Producción de entropía local del flujo de Poiseuille para distintos valores de deslizamiento en la pared inferior, α_1 , cuando $\alpha_2 = 0$. $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

De las Figuras 3.4.3 y 3.4.4 el mismo comportamiento expresado anteriormente se aprecia para un flujo oscilatorio tomando en cuenta el deslizamiento.

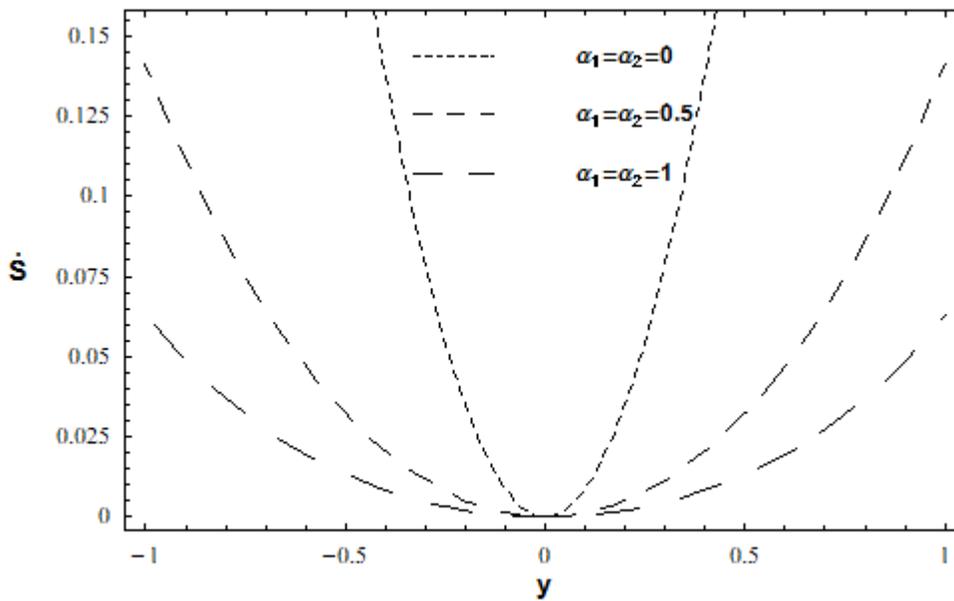


Figura 3.4.3. Producción de entropía local del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$. $R_\omega = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

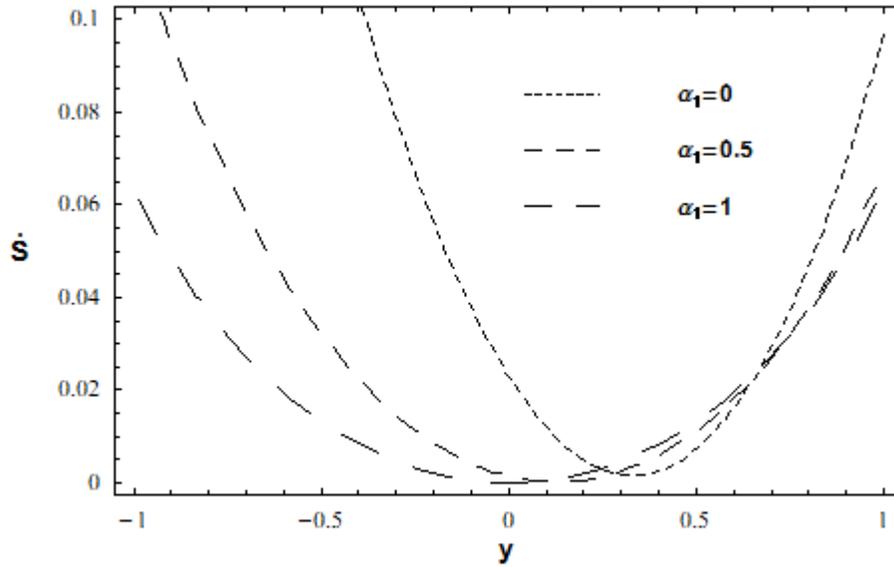


Figura 3.4.4. Producción de entropía local del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de deslizamiento en la pared inferior, α_1 , cuando $\alpha_2 = 0$. $R_\omega = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

El aumento en la oscilación del fluido produce mayor producción de entropía local en el sistema, siendo la menor pérdida de energía en el centro del canal, ver Figura 3.4.5.

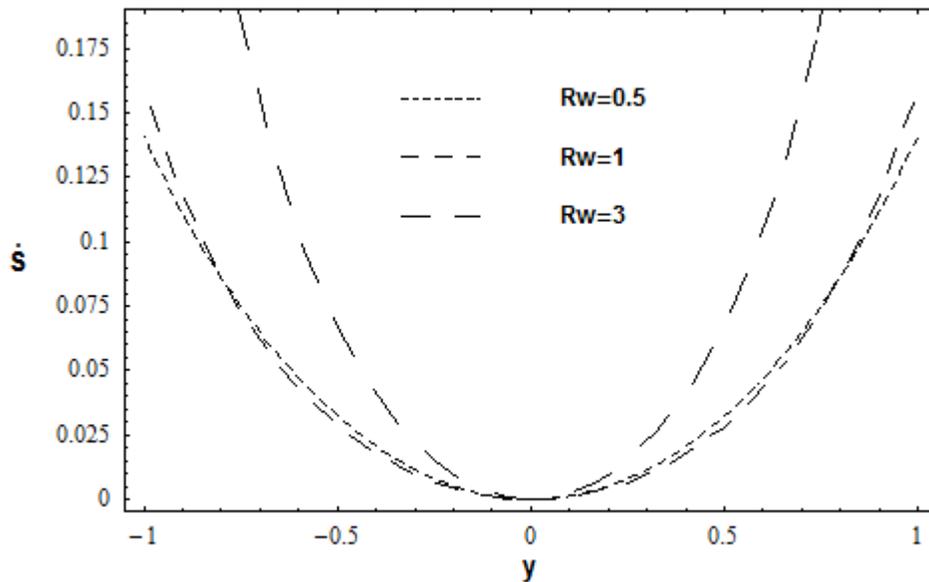


Figura 3.4.5. Producción de entropía local del flujo oscilatorio ordinario para distintos valores de R_ω con deslizamiento en la paredes, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Se observa en las Figuras 3.4.6 y 3.4.7 un comportamiento similar a los casos ordinario y oscilatorio, donde se toma en cuenta el deslizamiento tanto simétrico como asimétrico. Cuando el deslizamiento aumenta la entropía local disminuye sobre todo en las paredes; la diferencia entre los otros dos sistemas es que en el centro del canal existe mayor producción de pérdidas de energía útil que los otros dos casos.

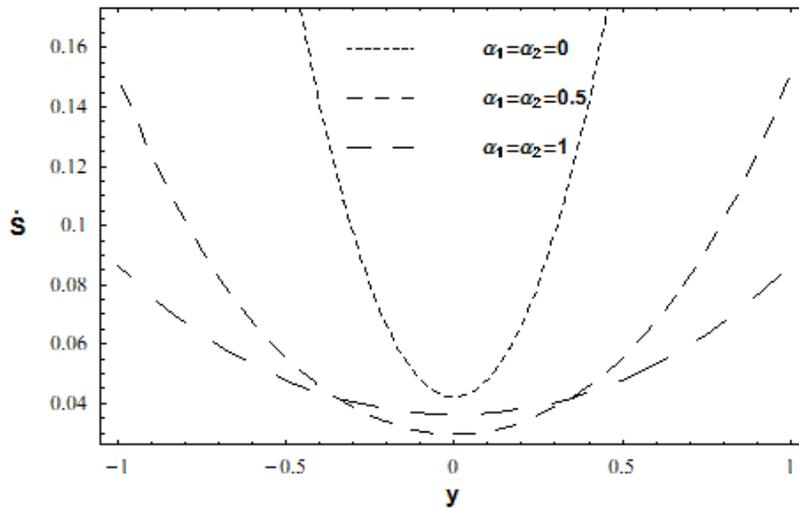


Figura 3.4.6. Producción de entropía local del flujo MHD para distintos valores de deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$. $M = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

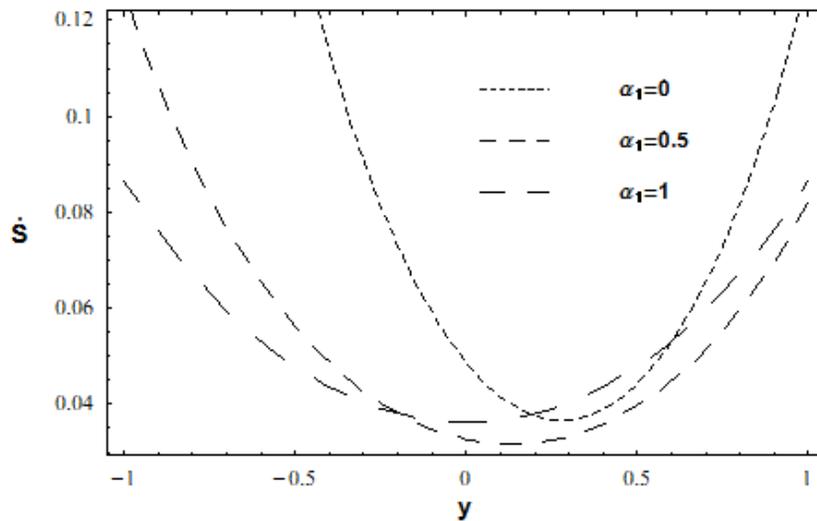


Figura 3.4.7. Producción de entropía local del flujo MHD para distintos valores de deslizamiento en la pared inferior, α_1 , cuando $\alpha_2 = 0$. $M = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

El incremento del campo magnético conduce a un aumento de entropía en casi todo el sistema teniendo como excepción alrededor del centro del canal donde ocurre lo contrario, existe disminución de producción de entropía, ver Figura 3.4.8.

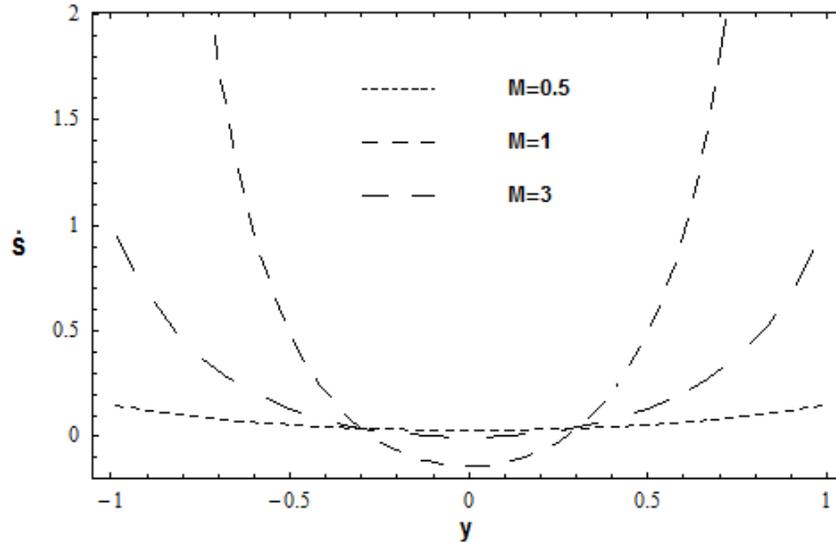


Figura 3.4.8. Producción de entropía local del flujo MHD con deslizamiento en las paredes para distintos valores de Hartmann , $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Así pues, se observa lo mismo para el caso en particular, el flujo oscilatorio MHD, la disminución de pérdidas de energía útil cuando el deslizamiento se incrementa tanto en las dos paredes como en una sola. Las diferencias principales entre los demás casos son que en el centro del canal no se comporta como los primeros dos casos estudiados, es decir disminuye la entropía en medio y no se mantiene con el mismo valor; y la producción de entropía son apenas mayores que los demás casos, ver Figuras 3.4.9 y 3.4.10

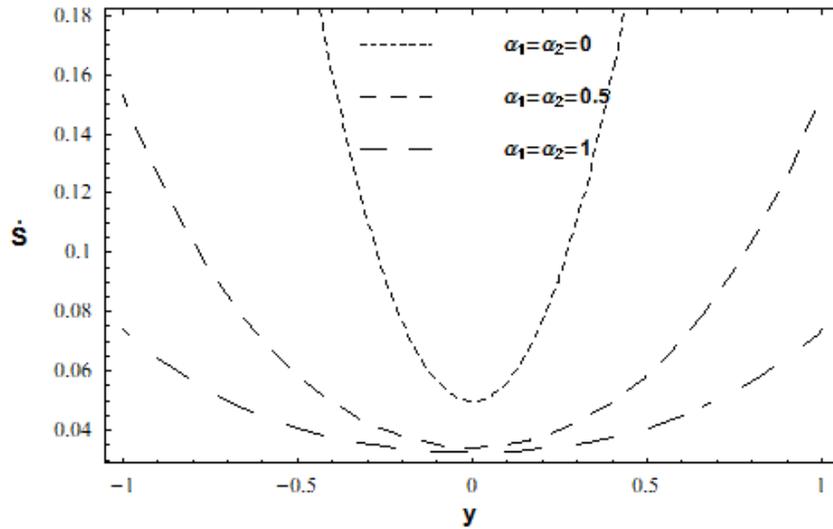


Figura 3.4.9. Producción de entropía local del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$. $R_\omega = 0.5$, $M = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

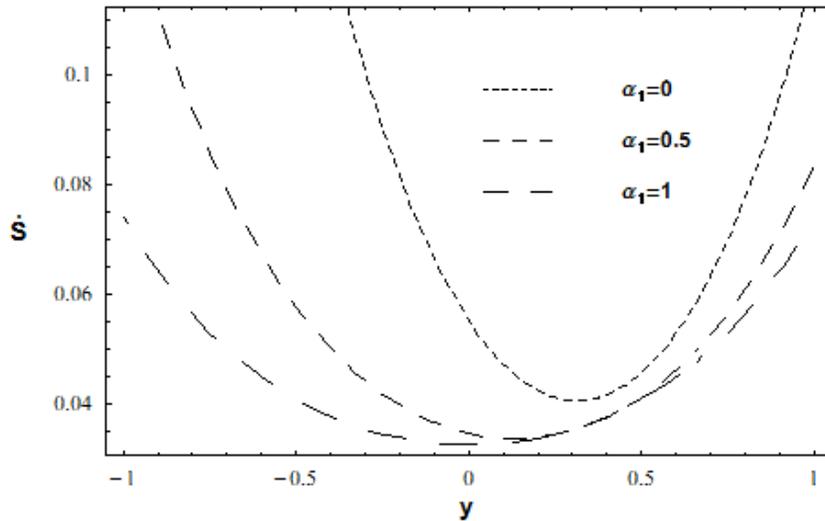


Figura 3.4.10. Producción de entropía local del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de deslizamiento en la pared inferior, α_1 , cuando $\alpha_2 = 0$. $R_\omega = 0.5$, $M = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

En la Figura 3.4.11 se puede ver que un flujo oscilatorio produce mucho menor entropía mientras que el de mayor producción es el flujo oscilatorio MHD ya que en él se consideran más parámetros del sistema que en los demás casos.

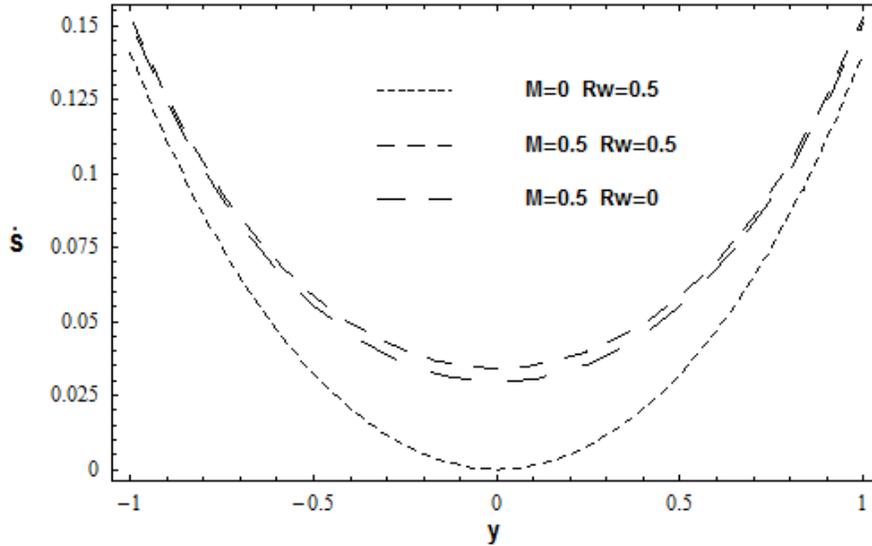


Figura 3.4.11. Producción de entropía local del flujo oscilatorio MHD para distintos valores de M y R_w , $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

Con la entropía local fue posible encontrar mínimos de entropía para el coeficiente de deslizamiento. Cuando se aumenta el deslizamiento de la pared superior de un flujo ordinario incrementa la producción de entropía pero considerando el valor de deslizamiento de la pared inferior cercano a 1, encontraremos mínima producción de entropía (Figura 3.4.12).

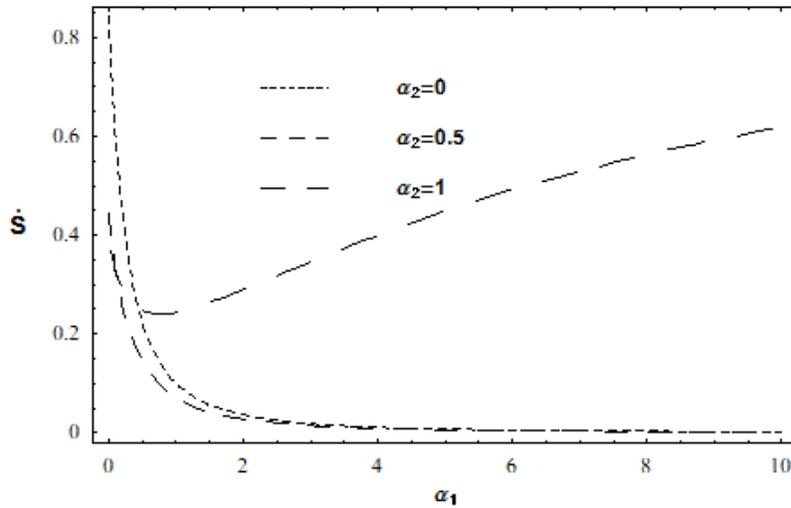


Figura 3.4.12. Producción de entropía local del flujo de Poiseuille en función del deslizamiento inferior α_1 para diferentes valores de α_2 . $y = -1$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

En el aumento del coeficiente de deslizamiento de la pared superior ocasiona una disminución de producción de entropía en el sistema oscilatorio, además se alcanza un mínimo de entropía cuando el deslizamiento de la otra pared esta en el rango de 1.5 a 2 del coeficiente de deslizamiento, ver Figura 3.4.13.

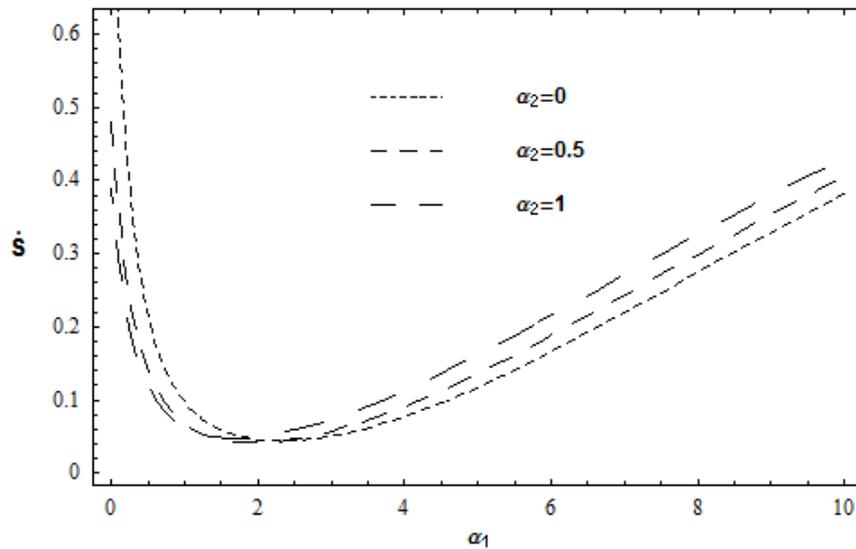


Figura 3.4.13. Producción de entropía local del flujo oscilatorio ordinario en función del deslizamiento inferior α_1 para diferentes valores de α_2 . $R_\omega = 0.5$, $y = -1$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

En un flujo oscilatorio MHD ocurre algo similar, conforme aumenta el deslizamiento de la pared superior disminuye la producción de pérdidas y puede alcanzar el mínimo de entropía con un valor del deslizamiento de la pared inferior alrededor de 2, ver Figura 3.4.14.

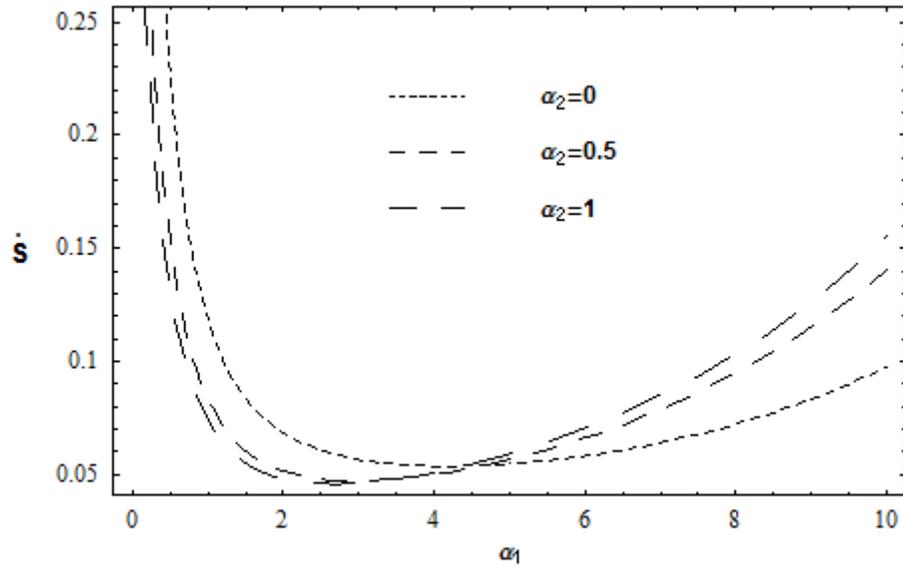


Figura 3.4.14. Producción de entropía local del flujo oscilatorio MHD en función del deslizamiento inferior α_1 para diferentes valores de α_2 . $R_\omega = 0.5$, $M = 0.5$, $\gamma = -1$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 10$ y $\theta_a = 10$.

En la Figura 3.4.15 se determina el valor óptimo de operación del flujo con mínima generación de entropía global cuando el número de Biot de la pared superior está alrededor de 0.3, también se aprecia que en este caso el efecto del deslizamiento sobre la producción de entropía global es insignificante.

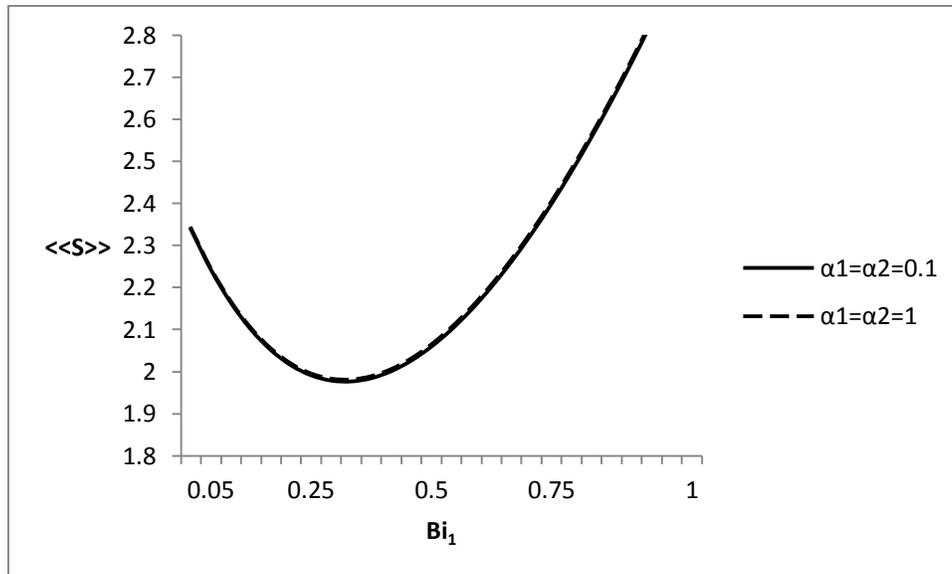


Figura 3.4.15. Producción de entropía global del flujo oscilatorio MHD como función del número de Biot de la pared superior, Bi_1 , para distintos valores de deslizamiento en las paredes, $\alpha_1 = \alpha_2$.
 $R_\omega = 5$, $M = 5$, $Bi_2 = 1$, $Pr = 5$ y $\theta_a = 10$.

También se puede ver que cuando aumenta el Biot de la pared inferior aumenta la producción de entropía, lo cual indica que valores bajos de transferencia de calor por convección hacia el medio permite alcanzar una eficiencia mayor del sistema oscilatorio MHD, ver Figura 3.4.16. A medida que Bi_2 aumenta el valor óptimo de Bi_1 donde la entropía global es mínima se desplaza hacia valores mayores y mayor es también el valor correspondiente de entropía mínima.

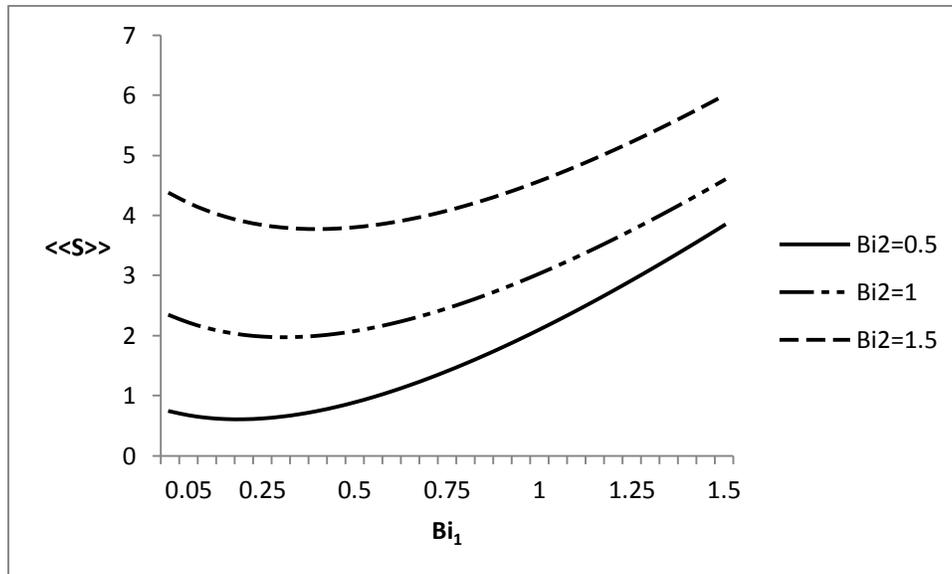


Figura 3.4.16. Producción de entropía global del flujo oscilatorio MHD como función de la pared superior, Bi_1 , distintos valores de Biot inferior, Bi_2 . $R_\omega = 5$, $M = 5$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $Pr = 5$ y $\theta_a = 10$.

En la Figura 3.4.17 se puede observar que la entropía global aumenta con el número de Hartmann hasta alcanzar un valor asintótico para valores mayores a tres. Esto ocurre en las tres curvas mostradas para los diferentes deslizamientos, de la pared superior, α_2 , tomados en cuenta.

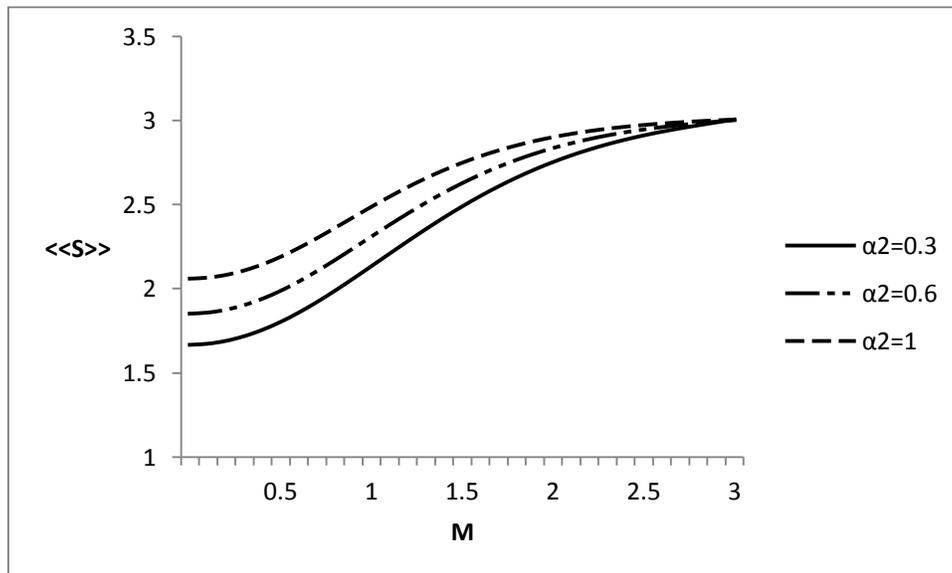


Figura 3.4.17. Producción de entropía global del flujo oscilatorio MHD como función del número de Hartmann para distintos valores de deslizamiento en la pared superior, α_2 . $R_\omega = 5$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $\alpha_1 = 0.1$, $Pr = 5$ y $\theta_a = 10$.

La variación de la entropía global con el número de Prandtl se ilustra en la Figura 3.4.18. Cuando el número de Prandtl es menor a cuatro se observa un decrecimiento de la entropía global y cuando rebasa este valor, sin importar la intensificación de oscilación y de campo magnético, la entropía se mantiene constante.

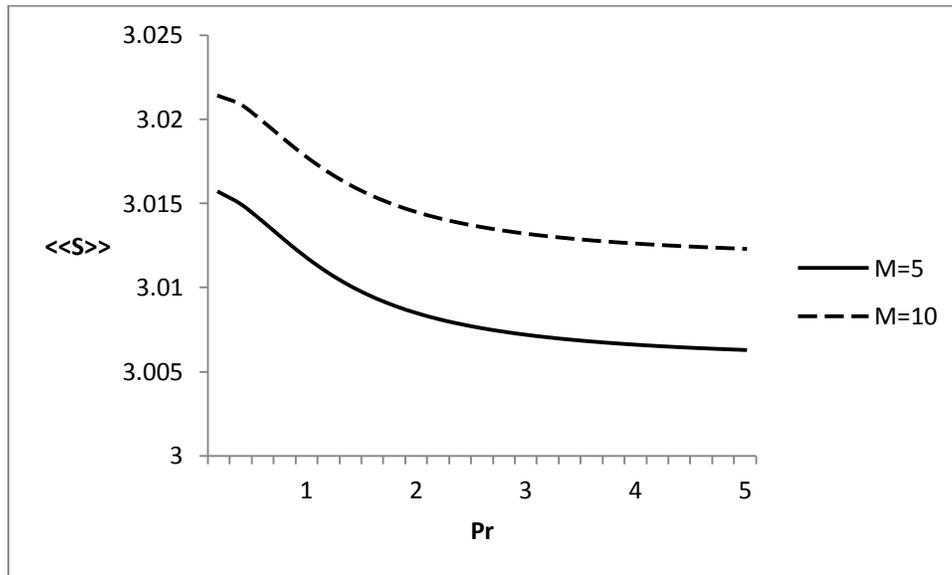


Figura 3.4.18. Producción de entropía global del flujo oscilatorio MHD como función del número de Prandtl para distintos valores de Hartmann, $R_\omega = 5$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, y $\theta_\alpha = 10$.

Por último, se observa en la Figura 3.4.19 que a partir del valor 1 del deslizamiento de la pared inferior, α_1 , se mantiene constante la producción de entropía teniendo en cuenta que el valor del deslizamiento para la parte superior es de $\alpha_2 = 0.1$. También se aprecia que para valores bajos de frecuencia de oscilación la $\langle\langle S \rangle\rangle$ siempre disminuye y a partir de determinado valor de frecuencia lo que hace es aumentar en ambos casos hasta que tiende a un valor constante como se mencionó anteriormente a partir de $\alpha_1 = 1$

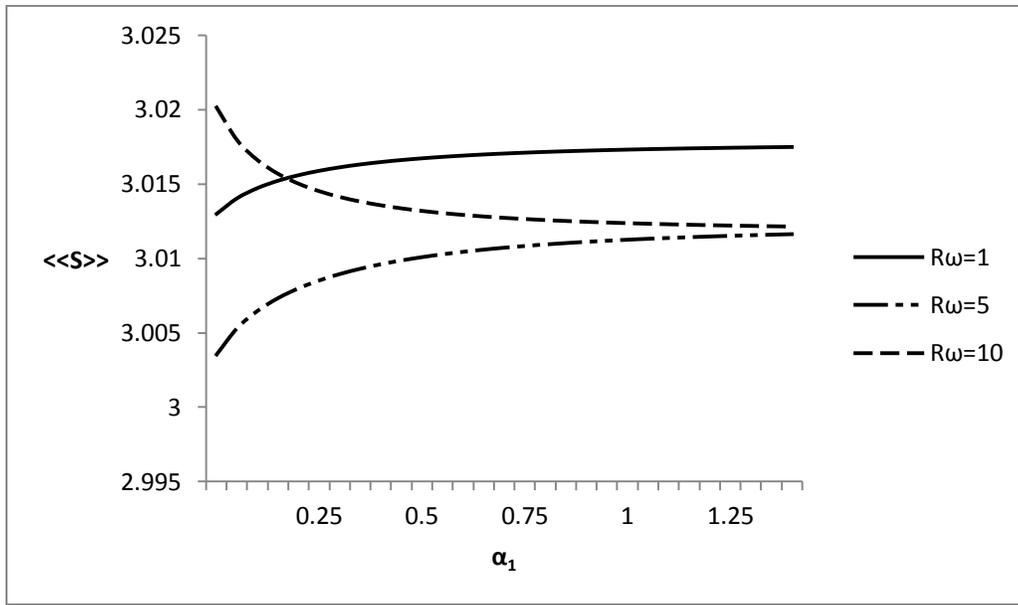


Figura 3.4.19. Producción de entropía global del flujo oscilatorio MHD como función del deslizamiento de la pared inferior, α_1 , para distintos valores de R_ω , $M = 5$, $\alpha_2 = 0.1$, $Bi_1 = Bi_2 = 1$, $Pr = 5$, y $\theta_\alpha = 10$.

Capítulo 4

Conclusiones

El comportamiento es determinado principalmente por las ecuaciones de balance. Primero es necesario determinar la expresión de velocidad para después encontrar la ecuación que describa el comportamiento térmico en el sistema y con esto llegar a una expresión explícita de la producción de entropía. Los cálculos se realizan de manera sucesiva debido a que la expresión de entropía contiene términos de velocidad y temperatura, y la temperatura contiene el término de velocidad, por eso la necesidad de la determinación de sus comportamientos.

En el presente estudio se analizó, en el orden prescrito, el efecto de cada uno de los parámetros que caracterizan al sistema sobre el campo de velocidad y temperatura. Los resultados mostraron que la presencia de campo magnético en un sistema hace que los perfiles de velocidades se aplanen mientras que el perfil de temperatura se comporta de manera parabólica habiendo un máximo de temperatura en el centro del canal. Además, cuando la intensidad del campo aumenta, la temperatura en el sistema disminuye, es decir a mayor número de Hartmann valores menores de temperatura se observan en el dispositivo.

La frecuencia de oscilación del fluido en el sistema hace que las velocidades se comporten como armónicos. Cuando ésta se intensifica aumentan las velocidades en el sistema lo cual afecta directamente el comportamiento térmico, esto es, a mayores valores de Reynolds oscilatorio mayor es la temperatura existente en el sistema. Dicho aumento de temperatura se debe a que el número de Reynolds oscilatorio depende directamente de la velocidad angular, es como incrementar la velocidad del fluido por tanto existe una mayor disipación viscosa en el canal.

El efecto del deslizamiento en las paredes se analizó en esta investigación, concluyendo que cuando se considera el coeficiente de deslizamiento en el sistema, para un flujo ordinario, oscilatorio, MHD o flujo oscilatorio MHD, se afecta significativamente tanto el comportamiento del sistema como que la producción de entropía.

Sobre la parte del comportamiento dinámico, el efecto principal del deslizamiento es el aumento de las velocidades las paredes conforme aumenta el efecto Slip, disminuyen drásticamente las velocidades en la pared donde se considera el efecto.

Este aumento de velocidad en las paredes se refleja en el comportamiento térmico, ya que mientras aumenta el deslizamiento la fricción disminuye en ella. De igual manera sucede en la producción local de entropía; a mayores valores de deslizamiento, menor pérdida de energía útil en el canal del sistema. Por lo tanto, para la construcción de un sistema es muy importante tomar en cuenta el deslizamiento en las paredes ya que también de ello dependerá la eficiencia del sistema.

Se determinaron valores óptimos de los parámetros del sistema donde la entropía es mínima. El mínimo se alcanza cuando el número de Biot de la pared superior es igual 0.25 mientras que el valor del Biot de la pared inferior es 1, es decir que el sistema debe estar más aislado en la pared superior que la inferior para obtener menor pérdida de energía útil.

Con el aumento del número de Hartmann la entropía global aumenta y encuentra un valor asintótico a partir de M igual a 3. Tomando en cuenta que la intensidad del campo magnético es el parámetro que variamos dentro de la expresión de M , entonces, se disipa menos energía cuando el campo magnético no es tan intenso.

A medida que aumenta el número de Prandtl la entropía global disminuye y a partir de valores de Prandtl mayores a 4 se observa que para las condiciones analizadas la entropía prácticamente no varía. Esto permite definir la característica

del fluido de trabajo ya que Pr depende de la viscosidad dinámica, conductividad térmica y capacidad calorífica del fluido.

Por último, se determinó que la entropía global para valores bajos de frecuencia de oscilación disminuye con el deslizamiento de la pared inferior hasta cierto valor de frecuencia a partir del cual comienza a aumentar con dicho deslizamiento.

En los valores donde las pérdidas de energía útil son menores, podemos construir un sistema magnetohidrodinámico oscilatorio óptimo desde el punto de vista termodinámico o de análisis de segunda ley.

REFERENCIAS

- [1] Y. Haseli, Performance of Irreversible Heat Engines at Minimum Entropy Generation, *Applied Mathematical Modelling*, 2013; 37: 9810-9817.
- [2] G. Yang et. Al., Flow Reversal and Entropy Generation Due to Buoyancy Assisted Mixed Convection in the Entrance Region of a Three Dimensional Vertical Rectangular Duct, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013; 67: 741-751.
- [3] M. M. Rashidi et. Al., Entropy Generation in Steady MHD Flow Due to a Rotating Porous Disk in a Nanofluid, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2013 ; 62: 515-525.
- [4] Richard C. Tolman and Paul C. Fine, On the Irreversible Production of Entropy, *Reviews of Modern Physics*, 1948, 20: 51-77.
- [5] Pohl Valero, S & F. Cala Vitery: Energía, entropía y religión. Un repaso histórico. *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 34 (130): 37-52, 2010. ISSN 0370-3908.
- [6] S. C. Kaushik et. Al., Solar-Assisted Liquid Metal MHD Power Generation: A State of the Art Study, Centre for Energy Studies, Indian Institute of Technology Delhi, 1994.
- [7] Linjin Zheng, *Topics in Magnetohydrodynamics*, InTech, Croacia, 2012.
- [8] M. S. Tillack and N. B Morley, *Magnetohydrodynamics*, McGraw Hill, 1998.
- [9] R. Y. Pei and R. W. Hess, *The Liquid-Metal Closed-Cycle System of Magnetohydrodynamic Power Generation*, Rand, Santa Mónica, CA; 1978.
- [10] NASA-Lewis Research Center, *Closed-Cycle MHD Power Generation*, Cleveland, Ohio, 1975.
- [11] Myer Kutz. *Mechanical Enginner´s Handbook: Energy and Power* (2006). Vol. 4. Third Edition. Chapter 4: Exergy Analysis, Entropy Generation Minimization, and Constructal Theory.

- [12] Johannessen E., Nummedal L. and Kjelstrup S., Minimizing the entropy production in heat exchange, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2002; 45:2649-2654.
- [13] Sahin B., Kodal A. and Yavuz H., Maximum power density analysis of an irreversible Joule-Brayton engine, *J. Phys. D: Appl.Phys.*, 1996; 29:1162-.
- [14] Sciacovelli A, Verda V. Entropy generation analysis in a monolithic-type solid oxide fuel cell (SOFC). *Energy* 2009; 34(7):850-65.
- [15] Sekulic' D. P., Campo A. and Morales J. C., Irreversibility phenomena associated with heat transfer and fluid friction in laminar flows through singly connected ducts, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1997; 40:905-.
- [16] Ibáñez G., Cuevas S. and López de Haro M., Minimization of entropy generation by asymmetric convective cooling, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2003; 46:1321-1328.
- [17] Ibáñez G., Cuevas S. and López de Haro M., Heat transfer in asymmetric convective cooling and optimized entropy generation rate, *Rev. Mex, Física*, 49(4), 2003.
- [18] Ibáñez G., López de Haro M. and Cuevas S., Thermodynamic optimization of radial MHD flow between parallel disks, *J. Non-Equilib. Thermodynamics*. (2004; 29:107-122).
- [19] Ibáñez G., Cuevas S. and López de Haro M., Optimization analysis of an alternate MHD electric generator. *Energy Conversion and Management*, 2002; 43(14):1757-1771.
- [20] Ibáñez G, Cuevas S, López de Haro M. Optimization of a magnetohydrodynamic flow based on the entropy generation minimization method. *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 2006; 33:295-301.
- [21] Ibañez G and Cuevas S. Entropy generation minimization of a MHD (magnetohydrodynamic) flow in a microchannel. *Energy*, 2010; (35):4149-415.

- [22] Ibañez G, López A and Cuevas S. Optimum wall thickness ratio based on the minimization of entropy generation in a viscous flow between parallel plates. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2012; 39:587-592.
- [23] Haro M. *New Trends in Statistical Physics*, Chapter 7: Entropy Generation in Oscillatory Flow Between Parallel Plates. 97-102.
- [24] Aytac A, Ibrahim O and Guven K. Effect of slip on entropy generation in a single rotating disk in MHD flow. *Applied Energy*, 2008; 85:1225-1236.
- [25] Smolentsev S. MHD duct flows under hydrodynamic “slip” condition. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2009; 23:557–570.
- [26] Rivero M and Cuevas S. Analysis of the slip condition in magnetohydrodynamic (MHD) micropumps. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2012; 166– 167:884– 892.
- [27] Saidi M. H. and Montazeri A. Second law analysis of a magnetohydrodynamic plasma generator. *Energy*, 2007; 32:1603-1616.
- [28] Aithal S. M. Analysis of optimum power extraction in a MHD generator with spatially varying electrical conductivity. *International Journal of Thermal Sciences*, 2008; 47:1107-1112.
- [29] Shahram Pouya, *Near Wall Velocimetry and Investigation Slip Flow on a Microchannels*, 2008.
- [30] Bejan A., *Entropy Generation Minimization*. New York: CRC Press, 1996.
- [31] Bejan A., *Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow*, Wiley, New York, 1994.
- [32] Bejan A., *Heat Transfer*, Wiley, New York, 1994.
- [33] Bejan A., *Convection Heat Transfer*, Wiley, New York, 2013.
- [34] Moreau R., *Magnetohydrodynamics*. Dordrecht: Kluwer, Netherlands, 1990.

- [35] Ibáñez Guillermo, Optimización de Procesos y Dispositivos Energéticos Basada en la Producción de Entropía, Tesis de Doctorado, CIE, UNAM, México, 2003.
- [36] Landau L. D. and Lifshitz E. M., Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1959.
- [37] S. R. de Groot and P. Mazur, Non-Equilibrium Thermodynamics, North-Holland, 1984.
- [38] Kurt C. Rolle, Termodinámica, Pearson Prentice Hall, 2006.
- [39] Raymond A. Serway and John W. Jewett, Física para Ciencias e Ingeniería con Física Moderna, vol.2, Cengage Learning, 2009.
- [40] Yunus A. Cengel and Afshin J. Ghajar, Transferencia de Calor y Masa, McGraw Hill, 2011.
- [41] Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba, Cálculo Vectorial, Pearson Addison Wesley, 2004.
- [42] Dennis G. Zill and Michael R. Cullen, Ecuaciones Diferenciales con Problemas con Valores en la Frontera, Cengage Learning, 2009.
- [43] Frank M. White, Mecánica de Fluidos, Mc Graw Hill, 2008.

ANEXOS

Constantes del comportamiento dinámico

$$\beta = \sqrt{M^2 + iR\omega}$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{M^2 - iR\omega}$$

$$F = \beta(\alpha_1 + \alpha_2)(Sh^2[\beta] + Ch^2[\beta]) + 2(1 + \alpha_1\alpha_2\beta^2)Sh[\beta]Ch[\beta]$$

$$\bar{F} = \bar{\beta}(\alpha_1 + \alpha_2)(Sh^2[\bar{\beta}] + Ch^2[\bar{\beta}]) + 2(1 + \alpha_1\alpha_2\bar{\beta}^2)Sh[\bar{\beta}]Ch[\bar{\beta}]$$

$$A_1 = \beta(\alpha_1 - \alpha_2)Sh[\beta]$$

$$\bar{A}_1 = \bar{\beta}(\alpha_1 - \alpha_2)Sh[\bar{\beta}]$$

$$A_2 = 2Sh[\beta] + \beta(\alpha_1 + \alpha_2)Ch[\beta]$$

$$\bar{A}_2 = 2Sh[\bar{\beta}] + \bar{\beta}(\alpha_1 + \alpha_2)Ch[\bar{\beta}]$$

$$A_3 = F\bar{F}(\beta^2 + \bar{\beta}^2)$$

$$\alpha' = \frac{K}{M^2 + iR\omega}$$

Constantes del comportamiento térmico

$$R = \bar{R} = \frac{\bar{\beta}^2\bar{F}}{\beta}A_2Sh[\beta] + \frac{\beta^2F}{\bar{\beta}}\bar{A}_2Sh[\bar{\beta}] - A_3$$

$$k_1 = \frac{(\bar{\beta}^2\bar{F})^2(\beta^2 - M^2)(A_1^2 - A_2^2) + (\beta^2F)^2(\bar{\beta}^2 - M^2)(\bar{A}_1^2 - \bar{A}_2^2) + 8M^4(F\bar{F})^2}{R^2}$$

$$k_2 = \frac{\bar{\beta}(\bar{\beta}^2\bar{F})^2(\beta^2 + M^2)(A_1A_2) + \beta(\beta^2F)^2(\bar{\beta}^2 + M^2)(\bar{A}_1\bar{A}_2)}{\beta\bar{\beta}R^2}$$

$$k_3 = \frac{(\bar{\beta}^2\bar{F})^2(\beta^2 + M^2)(A_1^2 + A_2^2)}{R^2}$$

$$k_4 = \frac{(\beta^2 F)^2 (\bar{\beta}^2 + M^2) (\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2)}{R^2}$$

$$k_5 = \frac{\beta^2 \bar{\beta}^2 F \bar{F} (\beta \bar{\beta} + M^2) (A_1 \bar{A}_1 + A_2 \bar{A}_2)}{R^2}$$

$$k_6 = \frac{\beta^2 \bar{\beta}^2 F \bar{F} (\beta \bar{\beta} - M^2) (A_1 \bar{A}_1 - A_2 \bar{A}_2)}{R^2}$$

$$k_7 = \frac{\beta^2 \bar{\beta}^2 F \bar{F} (\beta \bar{\beta} + M^2) (A_1 \bar{A}_2 + A_2 \bar{A}_1)}{R^2}$$

$$k_8 = \frac{\beta^2 \bar{\beta}^2 F \bar{F} (\beta \bar{\beta} - M^2) (A_2 \bar{A}_1 - A_1 \bar{A}_2)}{R^2}$$

$$k_9 = \frac{(\bar{\beta}^2 \bar{F})^2 (\beta^2 + M^2) (A_1 A_2)}{R^2}$$

$$k_{10} = \frac{(\beta^2 F)^2 (\bar{\beta}^2 + M^2) (\bar{A}_1 \bar{A}_2)}{R^2}$$

$$k_{11} = -\frac{F \bar{F} M^2 (\beta^2 + \bar{\beta}^2) (\bar{\beta}^2 \bar{F} A_1)}{R^2}$$

$$k_{12} = -\frac{F \bar{F} M^2 (\beta^2 + \bar{\beta}^2) (\beta^2 F \bar{A}_1)}{R^2}$$

$$k_{13} = -\frac{F \bar{F} M^2 (\beta^2 + \bar{\beta}^2) (\beta^2 F \bar{A}_2)}{R^2}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & \frac{1}{2(Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1Bi_2)} \left\{ \frac{k_1}{2} (Bi_2 - Bi_1) + \frac{k_2}{2} (Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1Bi_2) \right. \\
& + \frac{1}{8\beta^2} \langle 2(\beta k_3 (Bi_2 - Bi_1) + 2Bi_1Bi_2k_9) Sh[2\beta] + (4\beta k_9 (Bi_1 + Bi_2)) Ch[2\beta] \rangle \\
& + \frac{1}{8\bar{\beta}^2} \langle 2(\bar{\beta} k_4 (Bi_2 - Bi_1) + 2Bi_1Bi_2k_{10}) Sh[2\bar{\beta}] + (4\bar{\beta} k_{10} (Bi_1 + Bi_2)) Ch[2\bar{\beta}] \rangle \\
& + \frac{1}{(\beta + \bar{\beta})^2} \langle (k_5 (\beta + \bar{\beta}) (Bi_2 - Bi_1) + 2Bi_1Bi_2k_7) Sh[\beta + \bar{\beta}] \\
& + (k_7 (\beta + \bar{\beta}) (Bi_1 + Bi_2)) Ch[\beta + \bar{\beta}] \rangle \\
& + \frac{1}{(\beta - \bar{\beta})^2} \langle (k_6 (\beta - \bar{\beta}) (Bi_2 - Bi_1) + 2Bi_1Bi_2k_8) Sh[\beta - \bar{\beta}] \\
& + (k_8 (\beta - \bar{\beta}) (Bi_1 + Bi_2)) Ch[\beta - \bar{\beta}] \rangle \\
& + 2 \left\langle \frac{k_{11}}{\beta^2} (\beta (Bi_1 + Bi_2) Ch[\beta] + 2Bi_1Bi_2 Sh[\beta]) + \frac{k_{12}}{\bar{\beta}^2} \bar{\beta} (Bi_1 + Bi_2) Ch[\bar{\beta}] \right. \\
& \left. + \frac{Sh[\bar{\beta}]}{\bar{\beta}^2} (k_{13} \bar{\beta} (Bi_2 - Bi_1) + 2k_{12} Bi_1 Bi_2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & \frac{1}{2(Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1Bi_2)} \left\{ \frac{k_1}{4} (3Bi_1 + 3Bi_2 + 2Bi_1Bi_2 + 4) \right. \\
& + \frac{1}{8\beta^2} \langle 2(\beta k_3 (Bi_1 + Bi_2 + 2) + (Bi_1 - Bi_2)k_9) Sh[2\beta] \\
& + (4\beta k_9 (Bi_2 - Bi_1) + k_3 (Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1Bi_2)) Ch[2\beta] \rangle \\
& + \frac{1}{8\bar{\beta}^2} \langle 2(\bar{\beta} k_4 (Bi_1 + Bi_2 + 2) + (Bi_1 - Bi_2)k_{10}) Sh[2\bar{\beta}] \\
& + (4\bar{\beta} k_{10} (Bi_2 - Bi_1) + k_4 (Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1Bi_2)) Ch[2\bar{\beta}] \rangle \\
& + \frac{1}{(\beta + \bar{\beta})^2} \langle (k_5 (\beta + \bar{\beta}) (Bi_1 + Bi_2 + 2) + (Bi_1 - Bi_2)k_7) Sh[\beta + \bar{\beta}] \\
& + (k_7 (\beta + \bar{\beta}) (Bi_2 - Bi_1) + k_5 (Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1Bi_2)) Ch[\beta + \bar{\beta}] \rangle \\
& + \frac{1}{(\beta - \bar{\beta})^2} \langle (k_6 (\beta - \bar{\beta}) (Bi_1 + Bi_2 + 2) + (Bi_1 - Bi_2)k_8) Sh[\beta - \bar{\beta}] \\
& + (k_8 (\beta - \bar{\beta}) (Bi_2 - Bi_1) + k_6 (Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1Bi_2)) Ch[\beta - \bar{\beta}] \rangle \\
& + 2 \left\langle \frac{k_{11}}{\beta^2} (\beta (Bi_2 - Bi_1) Ch[\beta] + (Bi_1 - Bi_2) Sh[\beta]) + \frac{Ch[\bar{\beta}]}{\bar{\beta}^2} (k_{12} \bar{\beta} (Bi_2 - Bi_1) \right. \\
& + k_{13} (Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1Bi_2)) \\
& \left. + \frac{Sh[\bar{\beta}]}{\bar{\beta}^2} (k_{13} \bar{\beta} (Bi_1 + Bi_2 + 2) + k_{12} (Bi_1 - Bi_2)) \right\} + \theta_A
\end{aligned}$$

$$w = \sqrt{2iPrR_\omega}$$

$$\begin{aligned}
D_3(y^*) = & -\frac{1}{2w} \left\{ \frac{k_3}{4} \left(\frac{Sh[(2\beta + w)y^*]}{2\beta + w} + \frac{Sh[(2\beta - w)y^*]}{2\beta - w} \right) \right. \\
& + \frac{k_4}{4} \left(\frac{Sh[(2\bar{\beta} + w)y^*]}{2\bar{\beta} + w} + \frac{Sh[(2\bar{\beta} - w)y^*]}{2\bar{\beta} - w} \right) + \frac{k_1}{2w} Sh[wy^*] \\
& + 2 \left\{ \frac{k_9}{4} \left(\frac{Ch[(2\beta + w)y^*]}{2\beta + w} + \frac{Ch[(2\beta - w)y^*]}{2\beta - w} \right) \right. \\
& + \frac{k_{10}}{4} \left(\frac{Ch[(2\bar{\beta} + w)y^*]}{2\bar{\beta} + w} + \frac{Ch[(2\bar{\beta} - w)y^*]}{2\bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_5}{4} \left(\frac{Sh[(\beta + \bar{\beta} + w)y^*]}{\beta + \bar{\beta} + w} + \frac{Sh[(\beta + \bar{\beta} - w)y^*]}{\beta + \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_6}{4} \left(\frac{Sh[(\beta - \bar{\beta} + w)y^*]}{\beta - \bar{\beta} + w} + \frac{Sh[(\beta - \bar{\beta} - w)y^*]}{\beta - \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_7}{4} \left(\frac{Ch[(\beta + \bar{\beta} + w)y^*]}{\beta + \bar{\beta} + w} + \frac{Ch[(\beta + \bar{\beta} - w)y^*]}{\beta + \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_8}{4} \left(\frac{Ch[(\beta - \bar{\beta} + w)y^*]}{\beta - \bar{\beta} + w} + \frac{Ch[(\beta - \bar{\beta} - w)y^*]}{\beta - \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_{11}}{2} \left(\frac{Ch[(\beta + w)y^*]}{\beta + w} + \frac{Ch[(\beta - w)y^*]}{\beta - w} \right) \\
& + \frac{k_{12}}{2} \left(\frac{Ch[(\bar{\beta} + w)y^*]}{\bar{\beta} + w} + \frac{Ch[(\bar{\beta} - w)y^*]}{\bar{\beta} - w} \right) \\
& \left. + \frac{k_{13}}{2} \left(\frac{Sh[(\bar{\beta} + w)y^*]}{\bar{\beta} + w} + \frac{Sh[(\bar{\beta} - w)y^*]}{\bar{\beta} - w} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4(y^*) = & \frac{1}{2w} \left\{ \frac{k_3}{4} \left(\frac{Ch[(2\beta + w)y^*]}{2\beta + w} - \frac{Ch[(2\beta - w)y^*]}{2\beta - w} \right) \right. \\
& + \frac{k_4}{4} \left(\frac{Ch[(2\bar{\beta} + w)y^*]}{2\bar{\beta} + w} - \frac{Ch[(2\bar{\beta} - w)y^*]}{2\bar{\beta} - w} \right) + \frac{k_1}{2w} Ch[wy^*] \\
& + 2 \left\{ \frac{k_9}{4} \left(\frac{Sh[(2\beta + w)y^*]}{2\beta + w} - \frac{Sh[(2\beta - w)y^*]}{2\beta - w} \right) \right. \\
& + \frac{k_{10}}{4} \left(\frac{Sh[(2\bar{\beta} + w)y^*]}{2\bar{\beta} + w} - \frac{Sh[(2\bar{\beta} - w)y^*]}{2\bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_5}{4} \left(\frac{Ch[(\beta + \bar{\beta} + w)y^*]}{\beta + \bar{\beta} + w} - \frac{Ch[(\beta + \bar{\beta} - w)y^*]}{\beta + \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_6}{4} \left(\frac{Ch[(\beta - \bar{\beta} + w)y^*]}{\beta - \bar{\beta} + w} - \frac{Ch[(\beta - \bar{\beta} - w)y^*]}{\beta - \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_7}{4} \left(\frac{Sh[(\beta + \bar{\beta} + w)y^*]}{\beta + \bar{\beta} + w} - \frac{Sh[(\beta + \bar{\beta} - w)y^*]}{\beta + \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_8}{4} \left(\frac{Sh[(\beta - \bar{\beta} + w)y^*]}{\beta - \bar{\beta} + w} - \frac{Sh[(\beta - \bar{\beta} - w)y^*]}{\beta - \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_{11}}{2} \left(\frac{Sh[(\beta + w)y^*]}{\beta + w} - \frac{Sh[(\beta - w)y^*]}{\beta - w} \right) \\
& + \frac{k_{12}}{2} \left(\frac{Sh[(\bar{\beta} + w)y^*]}{\bar{\beta} + w} - \frac{Sh[(\bar{\beta} - w)y^*]}{\bar{\beta} - w} \right) \\
& \left. + \frac{k_{13}}{2} \left(\frac{Ch[(\bar{\beta} + w)y^*]}{\bar{\beta} + w} - \frac{Ch[(\bar{\beta} - w)y^*]}{\bar{\beta} - w} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 = & \frac{2w(wCh\{w\} + Bi_2Sh[w])}{2(w^2 + Bi_1Bi_2)Sh[w]Ch[w] + w(Bi_1 + Bi_2)(Sh^2[w] + Ch^2[w])} \left\{ (wCh[w] \right. \\
& + Bi_1Sh[w]) \left\{ \frac{k_3}{2} \left(\frac{Sh[2\beta + w]}{2\beta + w} + \frac{Sh[2\beta - w]}{2\beta - w} \right) + \frac{k_4}{2} \left(\frac{Sh[2\bar{\beta} + w]}{2\bar{\beta} + w} + \frac{Sh[2\bar{\beta} - w]}{2\bar{\beta} - w} \right) + \frac{k_1}{w} Sh[w] \right. \\
& + 2 \left\langle \frac{k_5}{2} \left(\frac{Sh[\beta + \bar{\beta} + w]}{\beta + \bar{\beta} + w} + \frac{Sh[\beta + \bar{\beta} - w]}{\beta + \bar{\beta} - w} \right) + \frac{k_6}{2} \left(\frac{Sh[\beta - \bar{\beta} + w]}{\beta - \bar{\beta} + w} + \frac{Sh[\beta - \bar{\beta} - w]}{\beta - \bar{\beta} - w} \right) \right. \\
& \left. \left. + k_{13} \left(\frac{Sh[\bar{\beta} + w]}{\bar{\beta} + w} + \frac{Sh[\bar{\beta} - w]}{\bar{\beta} - w} \right) \right\rangle \right\} \\
& - (wSh[w] + Bi_1Ch[w]) \left\{ \frac{k_3}{4} \left(\frac{Ch[2\beta + w]}{2\beta + w} - \frac{Ch[2\beta - w]}{2\beta - w} \right) + \frac{k_4}{4} \left(\frac{Ch[2\bar{\beta} + w]}{2\bar{\beta} + w} - \frac{Ch[2\bar{\beta} - w]}{2\bar{\beta} - w} \right) \right\} \\
& + \frac{k_1}{2w} Ch[w] \\
& + 2 \left\langle \frac{k_9}{4} \left(\frac{Sh[2\beta + w]}{2\beta + w} - \frac{Sh[2\beta - w]}{2\beta - w} \right) + \frac{k_{10}}{4} \left(\frac{Sh[2\bar{\beta} + w]}{2\bar{\beta} + w} - \frac{Sh[2\bar{\beta} - w]}{2\bar{\beta} - w} \right) \right. \\
& + \frac{k_5}{4} \left(\frac{Ch[\beta + \bar{\beta} + w]}{\beta + \bar{\beta} + w} - \frac{Ch[\beta + \bar{\beta} - w]}{\beta + \bar{\beta} - w} \right) + \frac{k_6}{4} \left(\frac{Ch[\beta - \bar{\beta} + w]}{\beta - \bar{\beta} + w} - \frac{Ch[\beta - \bar{\beta} - w]}{\beta - \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_7}{4} \left(\frac{Sh[\beta + \bar{\beta} + w]}{\beta + \bar{\beta} + w} - \frac{Sh[\beta + \bar{\beta} - w]}{\beta + \bar{\beta} - w} \right) + \frac{k_8}{4} \left(\frac{Sh[\beta - \bar{\beta} + w]}{\beta - \bar{\beta} + w} - \frac{Sh[\beta - \bar{\beta} - w]}{\beta - \bar{\beta} - w} \right) \\
& + \frac{k_{11}}{2} \left(\frac{Sh[\beta + w]}{\beta + w} - \frac{Sh[\beta - w]}{\beta - w} \right) + \frac{k_{12}}{2} \left(\frac{Sh[\bar{\beta} + w]}{\bar{\beta} + w} - \frac{Sh[\bar{\beta} - w]}{\bar{\beta} - w} \right) \\
& \left. \left. + \frac{k_{13}}{2} \left(\frac{Ch[\bar{\beta} + w]}{\bar{\beta} + w} - \frac{Ch[\bar{\beta} - w]}{\bar{\beta} - w} \right) \right\rangle \right\} \\
& + Sh[w] \left\{ \frac{k_3}{4} (Ch[2\beta + w] + Ch[2\beta - w]) + \frac{k_4}{4} (Ch[2\bar{\beta} + w] + Ch[2\bar{\beta} - w]) + \frac{k_1}{2} Ch[w] \right. \\
& + 2 \left\langle \frac{k_9}{4} (Sh[2\beta + w] + Sh[2\beta - w]) + \frac{k_{10}}{4} (Sh[2\bar{\beta} + w] + Sh[2\bar{\beta} - w]) \right. \\
& + \frac{k_5}{4} (Ch[\beta + \bar{\beta} + w] + Ch[\beta + \bar{\beta} - w]) + \frac{k_6}{4} (Ch[\beta - \bar{\beta} + w] + Ch[\beta - \bar{\beta} - w]) \\
& + \frac{k_7}{4} (Sh[\beta + \bar{\beta} + w] + Sh[\beta + \bar{\beta} - w]) + \frac{k_8}{4} (Sh[\beta - \bar{\beta} + w] + Sh[\beta - \bar{\beta} - w]) \\
& + \frac{k_{11}}{2} (Sh[\beta + w] + Sh[\beta - w]) + \frac{k_{12}}{2} (Sh[\bar{\beta} + w] + Sh[\bar{\beta} - w]) \\
& \left. \left. + \frac{k_{13}}{2} (Ch[\bar{\beta} + w] + Ch[\bar{\beta} - w]) \right\rangle \right\} \\
& - Sh[w] \left\{ \frac{k_3}{4} (Ch[2\beta + w] + Ch[2\beta - w]) + \frac{k_4}{4} (Ch[2\bar{\beta} + w] + Ch[2\bar{\beta} - w]) + \frac{k_1}{2} Ch[w] \right. \\
& + 2 \left\langle \frac{k_9}{4} (Sh[2\beta + w] + Sh[2\beta - w]) + \frac{k_{10}}{4} (Sh[2\bar{\beta} + w] + Sh[2\bar{\beta} - w]) \right. \\
& + \frac{k_5}{4} (Ch[\beta + \bar{\beta} + w] + Ch[\beta + \bar{\beta} - w]) + \frac{k_6}{4} (Ch[\beta - \bar{\beta} + w] + Ch[\beta - \bar{\beta} - w]) \\
& + \frac{k_7}{4} (Sh[\beta + \bar{\beta} + w] + Sh[\beta + \bar{\beta} - w]) + \frac{k_8}{4} (Sh[\beta - \bar{\beta} + w] + Sh[\beta - \bar{\beta} - w]) \\
& \left. \left. + \frac{k_{11}}{2} (Sh[\beta + w] + Sh[\beta - w]) + \frac{k_{12}}{2} (Sh[\bar{\beta} + w] + Sh[\bar{\beta} - w]) \right\rangle \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{k_{13}}{2} (Ch[\bar{\beta} + w] + Ch[\bar{\beta} - w]) \Big]$$