



Universidad de Ciencias y Artes de Chiapas

Instituto de Ciencias Básicas y Aplicadas.

**Centro de Investigación y Desarrollo Tecnológico en Energías
Renovables.**

T E S I S

Generación de Entropía en un Flujo MHD de un Nanofluido a través de un Canal Poroso

Que para obtener el grado de

Maestro en Materiales y Sistemas Energéticos Renovables

Presenta

Ing. Ignacio Zenteno Mazariegos

Director de Tesis

Dr. Guillermo Ibáñez Duharte

AGRADECIMIENTOS

A Dios

Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

A mis Padres

Ignacio Zenteno Velasco y Lucrecia Mazariegos Zea, por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo.

A mi Director de Tesis

Dr. Guillermo Ibáñez Duharte, por su gran apoyo y motivación para la culminación y elaboración de esta tesis.

A mi Novia

Jhoanna Guadalupe Ruiz López, por estar conmigo y apoyarme siempre.

A mis Amigos

Que nos apoyamos mutuamente en nuestra formación profesional y que hasta ahora, seguimos siendo amigos: Ignacio de Jesús Gómez Rosales, José Iván Toledo Gómez, Francisco Javier Rodríguez Cervantes, Karla Zambrano Solís y Oscar Martínez.

A mis Profesores

Por el apoyo incondicional que me brindaron durante mi formación académica, así como también por cada valiosa aportación en este proyecto: Dr. Joel Pantoja Enríquez, Dr. Jorge Evaristo Conde Díaz, Dr. José Francisco Pola Albores y Dr. Joel Moreira Acosta.

Todo este trabajo ha sido posible gracias a todos ellos.

RESUMEN

Existen diferentes investigaciones sobre sistemas de flujos magnetohidrodinámicos (MHD) de nanofluidos con el objetivo de minimizar la producción de entropía, y por tanto, las pérdidas de energía útil debido a la disipación viscosa, óhmica y la conducción de calor. Estos estudios se realizan despreciando algunos parámetros y efectos importantes. En la presente contribución, se estudian los efectos que tienen el deslizamiento en la interface fluido-pared y las condiciones térmicas de tercer tipo sobre la transferencia de calor y la generación de entropía del sistema. Las ecuaciones de balance de masa, momento y energía se resuelven para describir el sistema MHD. La condición de frontera de deslizamiento es considerada para determinar el comportamiento dinámico y las condiciones de frontera térmicas de tercer tipo se utilizan para obtener los campos de temperatura. Estos campos de velocidad y temperatura, así como sus gradientes son utilizados para calcular, la generación de entropía en función de los parámetros geométricos, las propiedades de materiales y las condiciones del fluido. Está demostrado que la generación de entropía alcanza valores mínimos bajo diferentes condiciones de operación que implican relaciones específicas de las propiedades.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4.1. Perfil de velocidad para diferentes valores de ϕ $Re=0$, $M=2$, $P=1$, $\alpha = 0.1$ (deslizamiento simétrico).	42
Figura 4.2. Perfil de velocidad para diferentes valores de M y Re . $P=1$, $\alpha = 0.05$ (deslizamiento simétrico), $\phi = 0.15$.	43
Figura 4.3. Perfil de velocidad para diferentes valores de Re y α . $M=0$, $\phi = 0$	44
Figura 4.4. Perfil de velocidad para diferentes valores de Re y α . $M=0$, $\phi = 0.15$	44
Figura 4.5. Perfil de velocidad para diferentes valores de M y α . $Re=0$, $\phi = 0$	45
Figura 4.6. Perfil de velocidad para diferentes valores de M y α . $Re=0$, $\phi = 0.15$	45
Figura 4.7. Perfil de temperatura para diferentes valores de Eckert y Reynolds. $\phi = 0$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $Bi=100$, $P=1$, $Pe=0.7$, $M=1$	46
Figura 4.8. Perfil de temperatura para diferentes valores de Eckert y Reynolds. $\phi = 0.5$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $Bi=100$, $P=1$, $Pe=0.7$, $M=1$	46
Figura 4.9. Perfil de temperatura para diferentes valores de Peclet y Biot en la placa superior. $\phi = 0$ y $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $Bi_1=10$, $Re=2$, $M=1$, $Ec=1$	47
Figura 4.10. Perfil de temperatura para diferentes valores de Peclet y Biot en la placa superior. $\phi = 0.5$ y $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $Bi_1=10$, $Re=2$, $M=1$, $Ec=1$	47
Figura 4.11. Perfil de temperatura para diferentes valores de Pe . $\alpha=0$, $M=1$ $Re=1$, $P=1$, $Ec=1$, $Bi=100$, $\phi = 0$	48
Figura 4.12. Perfil de temperatura para diferentes valores de Pe . $\alpha=0$, $M=1$ $Re=1$, $P=1$, $Ec=1$, $Bi=100$, $\phi = 0.5$	48
Figura 4.13. Perfil de temperatura para diferentes valores de M . $\alpha=0$, $Pe=0$ $Re=0$, $P=1$, $Ec=1$, $Bi=100$, $\phi = 0$	49
Figura 4.14. Perfil de temperatura para diferentes valores de M . $\alpha=0$, $Pe=0$ $Re=0$, $P=1$, $Ec=1$, $Bi=100$, $\phi = 0.5$	49
Figura 4.15. Entropía local con diferentes valores de Re y Ec . $Pe=0$, $M=1$, $Bi=1$, $Pr=0.011$	50
Figura 4.16. Entropía local con diferentes valores de Re y Ec . $Pe=0$, $M=1$, $Bi=1$, $Pr=0.011$.	50

Figura 4.17. Entropía local con diferentes valores de Pr y Bi_2 . $Re=2, Pe=0, M=1, Bi=1, Ec=1$.	51
Figura 4.18. Entropía local con diferentes valores de Pr y Bi_2 . $Re=2, Pe=0, M=1, Bi=1, Ec=1$.	51
Figura 4.19. Entropía global como función de α_1 , para diferentes valores de ϕ . $Re=1, \alpha_2 = 0.01, M=2.5, P=1, Ec=1, Pr=1, Bi_{1,2} = 1$.	52
Figura 4.20. Entropía global como función de α_1 , para diferentes valores de α_2 . $Re=1, M=2.5, P=1, Ec=1, Pr=1, Bi_{1,2} = 1, \phi = 0$.	53
Figura 4.21. Entropía global como función de M , para diferentes valores de ϕ . $Re=1, \alpha_{1,2} = 0.01, P=1, Ec=1, Pr=1, Bi_{1,2} = 1$.	53
Figura 4.22. Entropía global como función de Bi_1 , para diferentes valores de ϕ y M . $Re=1, \alpha_{1,2} = 0.1, P=1, Ec=1, Pr=1, Bi_2 = 1$	54
Figura 4.23. Entropía global como función de Ec , para diferentes valores de ϕ y M . $Re=1, \alpha_{1,2} = 0.01, P=1, Pr=0.7, Bi_{1,2} = 2$	55
Figura 4.24. Entropía global como función de M para diferentes valores de ϕ . $Re=2, \alpha_{1,2} = 0.1, P=1, Ec=1, Pr=0.011, Bi_{1,2} = 1$	55
Figura 4.25. Entropía global como función de M para diferentes valores de α y Pr . $Re=2, P=1, Ec=1, \phi = 0.1, Bi_{1,2} = 1$	56
Esquema 3.1. Flujo magnetohidrodinámico de un nanofluido a través de 2 placas porosas	31

DEFINICIONES BÁSICAS Y GLOSARIO DE TÉRMINOS

a	Espesor del sólido; separación entre las paredes inferior y superior
A	Área
B	Inducción Magnética
e	Energía interna
E	Intensidad de campo eléctrico
f	Densidad de fuerza de cuerpo
I	Densidad de corriente eléctrica total
j	Corriente de conducción
j_q	Flujo de calor
n	Vector unitario perpendicular a la superficie
P	Presión
\dot{S}	Producción local de entropía por unidad de volumen
t	Tiempo
T	Temperatura absoluta
u	Campo de velocidades del fluido
v	Volumen específico
τ	Tensor de esfuerzos mecánicos
τ'	Tensor de esfuerzos viscosos
V	Volumen
Pe	Número de Peclet
Re	Número de Reynolds
Ec	Número de Eckert
M	Número de Hartmann

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	II
RESUMEN	III
ÍNDICE DE FIGURAS	IV
DEFINICIONES BÁSICAS Y GLOSARIO DE TÉRMINOS	VI
CAPITULO 1. GENERALIDADES	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	2
1.3 Problemática	3
1.4 Objetivos	4
1.4.1 General.	4
1.4.2 Particulares.	4
1.5 Justificación	5
1.6 Conclusión	5
CAPITULO 2. MARCO TEORICO	6
2.1 Introducción	6
2.2 Fundamentos Teóricos	8
2.2.1 Termodinámica Irreversible Lineal	8
2.2.2 Hipótesis de la TIL	9
2.2.3 Balance de entropía	12
2.2.4 Ecuaciones del campo electromagnético	16
2.2.5 Ecuaciones de balance para un fluido conductor de electricidad en presencia de un campo electromagnético	17
2.2.5.1 Balance de Masa	17
2.2.5.2 Conservación de Momento Lineal	18
2.2.5.3 Balance de energía	20

2.2.6 Ecuaciones básicas de la MHD	22
2.2.7 Producción de entropía	24
2.2.8 Magnetohidrodinámica	26
2.2.9 Nanofluido	26
2.2.9.1 Propiedades termofísicas de nanofluidos	27
2.2.9.1.1 Densidad	27
2.2.9.1.2 Calor específico	27
2.2.9.1.3 Viscosidad	28
2.2.9.1.4 Conductividad térmica	28
2.3 Conclusión	29
CAPITULO 3. MODELADO MATEMATICO	30
3.1 Introducción	30
3.2 Consideraciones básicas del Sistema	31
3.3 Campo de Velocidad	32
3.4 Campo de Temperatura	35
3.5 Producción de Entropía Local y Global	37
3.6 Conclusión	40
CAPITULO 4. RESULTADOS	41
4.1 Introducción	41
4.2 Comportamiento Dinámico	42
4.3 Perfil de temperatura	46
4.4 Entropía Local	50
4.5 Entropía Global	52
CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO	57
REFERENCIAS	59
ANEXO	61

CAPITULO 1. GENERALIDADES

1.1 Introducción

Recientemente se ha investigado de manera amplia la optimización de diferentes dispositivos y procesos termodinámicos con base en el Método de Minimización de la Producción de Entropía. Este es un método que combina en modelos simples los conceptos básicos de la transferencia de calor, la mecánica de fluidos y la termodinámica. El proceso de optimización se lleva a cabo tomando en cuenta las constricciones físicas impuestas por las irreversibilidades producidas durante la operación de un dispositivo dado, de manera que se minimicen las pérdidas de energía útil o aprovechable.

Este trabajo está enfocado a la determinación de condiciones óptimas (de diseño u operación) que permitan minimizar las irreversibilidades que se presenten en el sistema energético. Como se mencionó previamente, la herramienta para lograr este objetivo es la minimización de la producción de entropía. Esto implica, por un lado, determinar el campo de velocidad y temperatura en el sistema, así como en su caso, la densidad de corriente eléctrica y de demás variables electromagnéticas relevantes al problema. Esto requiere, evidentemente, la solución de las ecuaciones de balance de la mecánica de fluidos o bien de la magnetohidrodinámica.

Una vez conocidos los campos mencionados, es posible determinar la producción de entropía local en el sistema. Como el proceso de optimización se requiere considerar las dimensiones finitas del dispositivo, es necesario integrar la producción de entropía local en toda la región de análisis con el fin de obtener la producción de entropía global.

De todo lo anterior se puede resumir que el objetivo del trabajo es Optimizar un sistema energético o proceso mediante el método de minimización de la producción de entropía (MMPE), para así determinar los valores óptimos de funcionamiento del mismo, donde la eficiencia exergética o de segunda ley es máxima.

1.2 Antecedentes

Actualmente, la eficiencia de procesos y dispositivos energéticos está siendo estudiada con mayor interés. En trabajos más recientes sobre diseño térmico y optimización se están aplicando tres métodos con los cuales se han obtenido resultados confiables. El método de Análisis de Exergía se basa en la primera y segunda ley de la termodinámica, y se aplica determinando condiciones de operaciones óptimas de forma teórica; el análisis nos muestra en cuánto contribuye cada componente del sistema a la irreversibilidad. El Método de Minimización de la Producción de Entropía (MMPE) es un método de modelado y optimización. La generación de entropía del sistema es obtenida como función de los parámetros físicos del sistema (dimensiones, propiedades de materiales, formas geométricas, restricciones). Previamente se construye el modelo del sistema tomando en cuenta las leyes, los procesos y las interacciones, así como también los principios fundamentales de la mecánica de fluidos, transferencia de calor, transferencia de masa y otros fenómenos de transporte. Por último, el método basado en la Teoría Constructal toma en cuenta sistemas de flujos los cuales son imperfectos debido a las resistencias por fluido, calor, electricidad, etc.; y estas resistencias no pueden ser eliminadas. El objetivo de este método consiste en encontrar la configuración del sistema donde las resistencias son distribuidas (balanceadas) tal que su efecto combinado sea mínimo (Kutz, 2006).

El método de minimización de generación de entropía tiene un gran campo de aplicación para sistemas energéticos con la restricción que debe ser aplicado a procesos y sistemas irreversibles. Recientemente, éste método ha sido utilizado por muchos investigadores obteniendo buenos resultados comparados con los experimentales. Los estudios realizados son llevados a cabo en dispositivos tales como intercambiadores de calor (Johannessen E., 2002), planta de potencia (Sahin B., 1996), celdas de combustibles (Sciacovelli A, 2009) y sistemas de convección natural y forzada (Ibáñez G. C. S., 2003)

En los últimos años, Ibáñez et al, han realizado investigaciones sobre la producción de entropía en distintos dispositivos, dentro de ellos se encuentran los sistemas MHD. Ibáñez et al, optimizaron un flujo radial MHD entre dos discos paralelos (Ibáñez G. L. d., 2004) y un generador alterno MHD (Ibáñez G. C. S., 2002), además hicieron el análisis de un flujo MHD en un microcanal tomando en cuenta condiciones de fronteras térmicas de tercer tipo y paredes de espesor finito (Cuevas I. G., 2010), las mismas condiciones de frontera fueron consideradas por el mismo autor para analizar un flujo ordinario entre dos planos paralelos obteniendo un espesor óptimo de la pared del ducto (Ibáñez, 2012). Mariano et al, demostraron en un capítulo del libro “New Trends in Statistical Physics” la manera de hacer un análisis de generación de entropía para un flujo oscilatorio entre dos planos paralelos (Haro), este caso complementa el análisis del generador alterno MHD realizado por Ibáñez et al. También lo que se ha considerado en la optimización es la corriente Hall en un sistema MHD. Saidi et al, analizaron la producción de entropía en un generador MHD (Montazeri, 2007) y Aithal et al investigaron la energía óptima de extracción de un flujo MHD (Aithal, 2008). Estas investigaciones mencionadas, se llevaron a cabo tomando en cuenta el no deslizamiento en las paredes. En la actualidad, los investigadores se están enfocando en considerar este efecto sobre la generación de entropía, tal como lo hizo Aytac et al, quienes analizaron el efecto de deslizamiento sobre la generación de entropía en un flujo MHD a través de un disco rotatorio (Aytac A, 2008).

1.3 Problemática

La existencia de sistemas o procesos de transferencia y/o conversión de energía que no funcionan de la manera más óptima posible utilizando como criterio de optimización, la máxima eficiencia exergética o mínima destrucción de exergía o trabajo útil.

1.4 Objetivos

1.4.1 General.

Optimizar un flujo MHD de un nanofluido mediante el método de minimización de la producción de entropía (MMPE), para así determinar los valores óptimos de funcionamiento del mismo, donde la eficiencia exergética o de segunda ley es máxima.

1.4.2 Particulares.

1. Determinar el comportamiento dinámico del nanofluido
 - a. *Determinar la expresión particular de la ecuación de balance de momento tomando en cuenta las consideraciones del sistema*
 - b. *Resolver la ecuación considerando el efecto de deslizamiento*
 - c. *Analizar el comportamiento dinámico del sistema*

2. Determinar el comportamiento térmico del nanofluido
 - a. *Determinar la expresión particular de la ecuación de balance de energía tomando en cuenta las consideraciones del sistema*
 - b. *Resolver la ecuación con condiciones térmicas de frontera de tercer tipo*
 - c. *Analizar el comportamiento térmico del sistema*

3. Determinar la generación de entropía en el flujo MHD del nanofluido
 - a. *Determinar una expresión explícita de entropía local del sistema que considere todos los términos disipativos del sistema.*
 - b. *Integrar la expresión local de entropía sobre todo el volumen del sistema*
 - c. *Evaluar la expresión de entropía global del sistema*
 - d. *Obtener valores óptimos de operación del sistema donde las pérdidas de energía útil sean mínimas*

1.5 Justificación

En la actualidad existen diversos sistemas energéticos que no operan con su máxima eficiencia desde un punto de vista termodinámico. Por ello, el método de minimización de la producción de entropía es una herramienta esencial para el estudio de dichos sistemas, ya que su principal función es la reducción de pérdidas de energía útil, y aumento de la eficiencia exergética. Por tanto, *el presente estudio nos permitirá la obtención de valores óptimos de los parámetros que caracterizan al sistema, donde la producción de entropía es mínima. Esto ayudará a la determinación de la configuración del sistema que nos podrá brindar la máxima eficiencia exergética. En otras palabras el presente estudio constituye un ahorro de energía y un incremento de la eficiencia del sistema que se analiza.*

1.6 Conclusión

El método de minimización de la producción de entropía es una herramienta para la determinación de condiciones óptimas de operación o diseño que permiten minimizar las irreversibilidades que se presentan en sistemas energéticos.

Por tanto, este método es esencial para el análisis de la minimización de entropía en un sistema con flujo magnetohidrodinámico (MHD) de un nanofluido

CAPITULO 2. MARCO TEORICO

2.1 Introducción

El estudio de la eficiencia de procesos basándose en la segunda ley de la termodinámica se lleva a cabo con los métodos de la termodinámica de los procesos irreversibles. La transformación de la materia y el aprovechamiento de la energía disponible, ya sea en la industria o en sistemas biológicos, tienen lugar en dispositivos que funcionan con determinada eficiencia según las restricciones impuestas por los parámetros de control, la interacción con el entorno y la naturaleza del sistema (Kjelstrup, 2006). Al considerar procesos reversibles, la termodinámica clásica de los estados de equilibrio permite determinar sin ambigüedad la eficiencia de un dispositivo. Dicho de otra manera, bajo la presunción de que la producción interna de entropía es cero (la debida a la naturaleza irreversible de un proceso), se determina la mínima cantidad de energía que se requiere suministrar a un dispositivo para que producto de una determinada transformación se obtenga el máximo beneficio (Denbigh, 1956). La termodinámica de los procesos irreversibles, (TPI), es la única teoría que permite deducir y describir correctamente ecuaciones fenomenológicas de los procesos de transporte, permitiendo analizar el acople entre procesos de diferente naturaleza (Kejlstrup-Ratjke, 1995). A partir de un riguroso análisis termodinámico de un sistema, de sus variables, de las restricciones y de la interacción con el entorno, la TPI permite deducir ecuaciones para el cálculo de la velocidad de producción de entropía asociada a la irreversibilidad de los procesos, permitiendo verificar de esta manera la validez de los análisis realizados y la consistencia de las ecuaciones fenomenológicas deducidas. La optimización de procesos según la segunda ley de la termodinámica tiene por objetivo minimizar la velocidad de producción de entropía asociada, para esto es necesario encontrar como contribuye a ésta cada proceso irreversible presente en el sistema (Salamon P. N., 2002). Dependiendo del enfoque que se le da al problema, durante el estudio de la optimización se habla de producción de entropía, de destrucción de exergía, de

trabajo perdido, de calor no compensado, de disipación o de la relación entre ellas (Bejan, Fundamentals of exergy analysis, entropy generation minimization, and the generation of flow architecture, 2002). Para llevar a cabo un adecuado estudio de optimización hay que tener presente que no siempre minimizar alguna de las cantidades antes mencionadas implica necesariamente maximizar los beneficios o la eficiencia, ya que esto depende de las restricciones impuestas al sistema (Salamon P. H., 2001).

Este capítulo aborda los fundamentos teóricos del método de minimización de la producción de entropía basada en la termodinámica irreversible lineal. En primer lugar, se comienza con la teoría de la termodinámica irreversible lineal seguida del balance de entropía. A continuación, se presentan las Ecuaciones de balance para un fluido conductor de electricidad en presencia de un campo electromagnético. Finalmente, se incluye los fundamentos de la magnetohidrodinámica y nanofluido. Se cierra este capítulo con una conclusión.

2.2 Fundamentos Teóricos

2.2.1 Termodinámica Irreversible Lineal

La Termodinámica de Procesos Irreversibles Lineal (TIL) es una teoría fenomenológica bien establecida que provee un marco general para la descripción de los procesos irreversibles que se llevan a cabo en una gran variedad de sistemas. Al igual que la termodinámica de equilibrio, la TIL puede sintetizarse mediante una formulación axiomática. La teoría se basa en cuatro postulados y da resultados que han sido ampliamente verificados experimentalmente. En particular, ofrece un sólido marco natural para describir los procesos disipativos, tanto en el flujo de fluidos conductores en presencia de campos magnéticos, lo que se conoce como magnetohidrodinámica, como en la hidrodinámica ordinaria.

La TIL es una teoría del continuo, que trata a las variables de estado como variables de campo, es decir, como funciones continuas de las coordenadas espaciales y del tiempo. Las ecuaciones básicas de la teoría se formulan de manera que contienen únicamente cantidades que sólo se refieren a un punto en el espacio y a un tiempo dado, es decir, se expresan en forma de ecuaciones locales, al igual que la dinámica de fluidos y la electrodinámica clásica. La primera hipótesis de la teoría, el equilibrio local, tiene relación con lo anterior y permite describir el estado termodinámico del sistema en cada punto mediante pocas variables, relacionadas entre sí de la misma forma que cuando el fluido se encuentra en equilibrio.

Uno de los objetivos fundamentales de la TIL es relacionar explícitamente la fuente de entropía con los diversos procesos irreversibles que se presentan en el sistema. Esto se puede lograr a través de la ecuación de balance de entropía, si conocemos las ecuaciones de balance de masa, momento y energía que describen la evolución temporal de las cantidades que se conservan en el sistema. Para el caso específico de fluidos conductores en presencia de un campo magnético se deben considerar los efectos de dicho campo en las variaciones de las variables conservadas a través de las ecuaciones de Maxwell.

2.2.2 Hipótesis de la TIL

En general se dice que un sistema está en equilibrio si las variables de estado intensivas (temperatura, densidad, etc.) son constantes a todo tiempo y tienen la misma magnitud en todas las regiones del sistema. De aquí se infiere que en equilibrio no existen gradientes de los parámetros intensivos y además no se presentan procesos espontáneos, de modo que no hay intercambio neto de energía o materia entre el sistema y sus alrededores, o entre una y otra parte del sistema. Si un sistema está en un estado en el que no se satisfacen estas condiciones, el sistema se encuentra fuera de equilibrio.

Cuando se perturba un sistema en equilibrio hacia un estado de no equilibrio mediante un agente externo o interno, al menos uno de los parámetros de estado se vuelve una función del vector de posición, \mathbf{r} , y el tiempo, t . La forma en que el sistema se aleja de su estado de equilibrio se derivará, en última instancia, de la suavidad o brusquedad con que estas funciones varíen en \mathbf{r} y t , esto es, de la magnitud de los gradientes espaciales y temporales (García Colín L.). Cuando se elimina la perturbación, se presenta espontáneamente un proceso irreversible de decaimiento, y el sistema avanza a través de una serie de estados de no equilibrio hasta que se alcanza el equilibrio. El proceso de decaimiento es un proceso de transporte, ya que alguna cantidad se transporta a través del sistema conforme éste intenta hacer independientes de la posición a todos los parámetros. Una dependencia espacial de los parámetros se asocia con un flujo.

Ahora bien, un sistema dado puede ser dividido en varios subsistemas de volumen dV cuyas posiciones son denotadas por un vector \mathbf{r} dado para cada sistema. Estos subsistemas son pequeños comparados con la trayectoria libre media molecular. El valor de una variable de estado r es el valor de la variable promediada sobre el elemento de volumen y además se supone que el elemento de volumen se escoge de tal forma que la variación de dicho valor en el mismo elemento es despreciable. Si el elemento de volumen se escoge de la forma descrita anteriormente se dice que está en equilibrio local y es posible asignar

cantidades termodinámicas a los subsistemas y estas cantidades tendrán el mismo significado que poseen en un sistema en equilibrio total, es decir, fuera de equilibrio se siguen manteniendo las mismas relaciones funcionales de equilibrio entre las variables termodinámicas.

Por lo anterior el postulado de equilibrio local dentro de la TIL permite definir cantidades termodinámicas para sistemas fuera de equilibrio y escribir relaciones termodinámicas en la misma forma que se haría para un sistema en equilibrio total, con la diferencia de que las cantidades termodinámicas toman sus valores locales, como funciones de r y t .

En la termodinámica de no equilibrio es de primordial importancia la ecuación de balance de entropía, que expresa el hecho de que la entropía de un elemento de volumen cambia con el tiempo debido a dos razones. En primer lugar cambia porque la entropía fluye a través del elemento de volumen y en segundo lugar porque existe una fuente de entropía (no negativa) debida a los fenómenos irreversibles presentes dentro del elemento de volumen. Para transformaciones reversibles la fuente de entropía es cero. Esta es la formulación local de una segunda ley de la termodinámica y constituye el segundo postulado de la TIL.

La fuente o producción de la entropía puede calcularse si se utiliza la relación termodinámica de Gibbs que conecta, en un fluido isotrópico multicomponente, la razón de cambio de la entropía en cada elemento de masa, con las razones de cambio de la energía y la composición. Como las ecuaciones de balance contienen diversas cantidades como los flujos de masa, el flujo de calor y corriente eléctrica, y el tensor de esfuerzos que se relacionan al transporte de masa, energía y momento, es evidente que, finalmente, la producción de entropía quedará expresada como la suma de términos formados por el producto de un flujo que caracteriza el proceso irreversible y una cantidad denominada fuerza termodinámica, que se relaciona con la no uniformidad del sistema o con las desviaciones de los valores de equilibrio de algunas variables de estado internas.

La producción de entropía puede servir entonces como una base para la descripción sistemática de los procesos irreversibles que ocurren en el sistema.

De lo antes mencionado se infiere que el conjunto de ecuaciones de conservación junto con la de balance de entropía y las ecuaciones de estado, contienen a los flujos irreversibles como incógnitas y por tanto deben darse ecuaciones fenomenológicas adicionales que relacionan los flujos y las fuerzas termodinámicas, para poder obtener un sistema de ecuaciones cerrado que pueda resolverse para las condiciones iniciales y de frontera dadas.

La tercera hipótesis de la TIL plantea que, en primera aproximación, los flujos son funciones lineales de las fuerzas termodinámicas. De manera precisa este tercer postulado plantea que si un sistema termodinámico inicialmente en equilibrio, es sometido a la acción de fuerzas termodinámicas suficientemente pequeñas para que su estado perturbado no difiera mucho de su estado de equilibrio inicial, entonces los flujos que se generan como consecuencia de esta acción son proporcionales a dichas fuerzas y a las constantes de proporcionalidad (coeficiente fenomenológicos) dependen únicamente de las propiedades del sistema en equilibrio. Ejemplos de este tipo de relaciones fenomenológicas lineales son la ley de Fourier para la conducción de calor, la ley de difusión de Fick y la ley de Ohm para la conducción eléctrica.

Otra cuestión importante se refiere a la matriz de coeficientes fenomenológicos que relacionan a los flujos y las fuerzas termodinámicas. Si la matriz es simétrica, el sistema de ecuaciones será completo, en caso contrario se necesitaría más información para poder resolverlo. Esto lleva a introducir una cuarta hipótesis conocida como el teorema de reciprocidad de Onsager que plantea la existencia de la simetría de la matriz de los coeficientes fenomenológicos. Esto, que ha sido demostrado por Onsager (García Colín L.), da lugar a un número de relaciones entre estos coeficientes, reduciendo el número de cantidades independientes y relacionando entre sí distintos efectos físicos. Uno de los objetivos de la TIL es estudiar las consecuencias físicas de las relaciones de reciprocidad en

aplicaciones de la teoría a diversas situaciones. Otro aspecto a tener en cuenta es que las ecuaciones para los flujos obedecen el principio de Curie el cual especifica que para un sistema isotrópico donde existen procesos irreversibles, sólo pueden acoplarse entre sí flujos y fuerzas de la misma naturaleza tensorial.

En la discusión anterior se han formulado los cuatro principios básicos de los cuales la TIL para el análisis de los diferentes problemas. Resumiendo, estos postulados son:

1. La hipótesis de equilibrio local.
2. La producción local de entropía es una cantidad no negativa.
3. La relación entre flujos y fuerzas termodinámicas es lineal y obedece el principio de Curie.
4. La matriz de coeficientes que relacionan los flujos y las fuerzas termodinámicas es simétrica.

2.2.3 Balance de entropía

De acuerdo con los principios de la termodinámica, para un sistema macroscópico se puede introducir una función de estado S , llamada entropía del sistema, que tiene propiedades (Mazur, 1984).

El cambio de la entropía dS se puede escribir como la suma de dos términos

$$dS = d_e S + d_i S \quad [2.1]$$

donde $d_e S$ es la entropía suministrada al sistema por sus alrededores y $d_i S$ es la entropía producida dentro del sistema. La segunda ley de la termodinámica establece que:

$$d_e S = 0, \text{ para un proceso reversible,} \quad [2.2]$$

$$d_i S \geq 0, \text{ para un proceso irreversible.} \quad [2.3]$$

Por otra parte, la entropía suministrada, $d_e S$, puede ser positiva, negativa o cero dependiendo de la interacción del sistema con sus alrededores. Para un sistema aislado adiabáticamente, $d_e S$ es cero y por lo tanto para este caso

$$dS = d_i S \geq 0, \quad [2.4]$$

que es una forma bien conocida de la segunda ley de la termodinámica.

Para sistemas cerrados que sólo intercambian calor con sus alrededores, de acuerdo con el teorema de Carnot-Clausius se tiene que

$$d_e S = \frac{dQ}{T}, \quad [2.5]$$

donde dQ es el calor suministrado al sistema por sus alrededores y T es la temperatura absoluta a la que el sistema recibe calor. Para este caso de [2.4] y [2.5] se obtiene que

$$d_e S \geq \frac{dQ}{T}, \quad [2.6]$$

para un sistema cerrado, que también es una forma bien conocida de la segunda ley de la termodinámica.

La termodinámica de equilibrio estudia procesos reversibles para los que se cumple la igualdad [2.2]. En la TIL uno de los objetivos importantes es relacionar la producción de entropía $d_i S$ con los diversos fenómenos irreversibles que ocurren dentro del sistema.

Como la entropía es una cantidad extensiva es posible obtener expresiones para la entropía total S y para su razón de cambio temporal.

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho s}{\partial t} dV, \quad [2.7]$$

Donde s es la entropía por unidad de masa, ρ la densidad de masa y V el volumen. Asimismo, puede escribirse una ecuación de balance para la entropía que en forma integral se expresa como

$$\int_V \frac{\partial \rho s}{\partial t} dV = - \int_A \mathbf{J}_s^T \cdot \mathbf{n} da + \int_V \dot{S} dV, \quad [2.8]$$

Donde \mathbf{J}_s^T es el flujo total de entropía, \mathbf{n} el vector unitario perpendicular a la superficie A y \dot{S} es la producción de entropía por unidad de volumen. Diferenciando [2.1] con respecto al tiempo y comparando con la ecuación [2.8], se puede asociar

$$d_e S = \int_A \mathbf{J}_s^T \cdot \mathbf{n} da \text{ y } d_i S = \int_V \dot{S} dV \quad [2.9]$$

Al utilizar el teorema de Gauss, la ecuación [2.8] se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s^T + \dot{S}, \quad [2.10]$$

donde la condición suficiente es

$$\dot{S} \geq 0. \quad [2.11]$$

Estas son las formas locales de [2.1] y [2.3], es decir, las expresiones matemáticas locales para la segunda ley de la termodinámica. Formalmente la ecuación [2.10] es una ecuación de balance para la densidad de entropía ρs , que expresa que la producción de entropía es una cantidad no negativa, es el segundo postulado de la TIL y se puede entender como una extensión de la segunda ley de la termodinámica para situaciones fuera de equilibrio.

Definiendo el flujo de entropía \mathbf{J}_s como la diferencia entre el flujo total de entropía y un término convectivo $\rho s \mathbf{u}$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s^T - \rho s \mathbf{u}, \quad [2.12]$$

la ecuación [2.10] se puede reescribir en la forma

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s + \dot{S}, \quad [2.13]$$

Donde \mathbf{u} es el campo de velocidades del fluido y $\frac{\partial}{\partial t}$ denota la derivada material dada por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad [2.14]$$

Para un sistema fluido de un solo componente fuera de equilibrio la entropía por unidad de masa s es una función de la energía interna e y la densidad ρ , que son los parámetros necesarios para definir completamente el estado del sistema, es decir, $s = s(e, \rho)$.

La hipótesis de equilibrio local implica la validez local de la relación de Gibbs, donde ahora las diferenciales que aparecen en ella deben tomarse como funciones de las coordenadas y el tiempo, es decir, será una relación entre derivadas totales, a saber,

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad [2.15]$$

Donde T es la temperatura absoluta y p la presión. Esta relación nos permite deducir la forma como cambia la entropía del sistema en el tiempo, si se conocen las ecuaciones que describen la evolución temporal de las cantidades e y ρ , o sea, las ecuaciones de conservación.

De acuerdo a los principios formulados anteriormente, el balance de entropía puede obtenerse de la ecuación de Gibbs [2.15] y con ayuda de las ecuaciones de conservación es posible obtener expresiones explícitas para el flujo y la producción de entropía.

A continuación se obtendrán las ecuaciones de conservación que describen el comportamiento de fluidos conductores de electricidad en presencia de un campo magnético; para ello primero se describen las ecuaciones del campo electromagnético o ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de balance, obtenidas de esta forma, se pueden particularizar para el caso de fluidos en ausencia de campos electromagnéticos.

2.2.4 Ecuaciones del campo electromagnético

Las ecuaciones básicas del electromagnetismo son conocidas como ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones junto con la ecuación de Lorentz para la fuerza, establecen las interacciones fundamentales del campo electromagnético, que se caracteriza por las siguientes cantidades macroscópicas: intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}(r, t)$, inducción magnética $\mathbf{B}(r, t)$, densidad de corriente eléctrica $\mathbf{j}(r, t)$ y densidad de carga eléctrica $\rho_e(r, t)$, que también puede expresarse como $\rho z(r, t)$, donde z es la carga por unidad de masa. Las cantidades macroscópicas se definen como promedios estadísticos sobre un número de átomos contenidos en un elemento de masa que es suficientemente grande para que puedan aplicarse los principios de la mecánica estadística, pero que es pequeño desde el punto de vista macroscópico.

En su forma diferencial las ecuaciones macroscópicas de Maxwell se expresan de la siguiente forma (García Colín L.).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho z}{\varepsilon}, \quad [2.16]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [2.17]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [2.18]$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad [2.19]$$

Donde ε y μ son escalares conocidos como la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio, respectivamente.

En general ε y μ podrían depender del estado termodinámico del medio, sin embargo para la gran mayoría de los problemas en que existen fluidos conductores pueden considerarse constantes. En particular, al trabajar con metales líquidos es posible tomar como una muy buena aproximación $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío.

2.2.5 Ecuaciones de balance para un fluido conductor de electricidad en presencia de un campo electromagnético

El principal efecto de un campo magnético sobre un fluido conductor es, por una parte, el surgimiento de fuerzas de cuerpo sobre el fluido (intercambio de cantidad de movimiento), y por otra, el intercambio de energía entre el campo y el fluido. En consecuencia las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos por sí mismas ya no son suficientes para dar una descripción adecuada del fenómeno cuando se considera la interacción electromagnética, y es necesario combinarlas con las ecuaciones del campo electromagnético a fin de obtener las ecuaciones fundamentales que gobiernan el flujo de un fluido conductor en presencia de un campo magnético. Estas ecuaciones, en ausencia del campo, se reducen a las ecuaciones de la hidrodinámica ordinaria.

A continuación se establecerán dichas ecuaciones, para un fluido simple, comenzando por las ecuaciones de conservación y luego las del campo electromagnético, para finalmente, bajo las conocidas aproximaciones de la magnetohidrodinámica (Hughes, 1989), combinarlas y obtener las ecuaciones de la MHD.

2.2.5.1 Balance de Masa

Considérese un sistema monocomponente donde no existen reacciones químicas y sea $\rho(\mathbf{r}, t)$ la densidad de masa y $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ el campo de velocidades del fluido. En su forma integral la ecuación de conservación de masa se establece que

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho dV = 0 \quad [2.20]$$

Donde dV es el elemento de volumen ocupado por el fluido. Con ayuda del teorema de transporte de Reynolds la ecuación anterior puede expresarse en la forma

$$\int_v \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = 0, \quad [2.21]$$

Puesto que el integrando es una función continua y el volumen de integración es arbitrario, se tiene que

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad [2.22]$$

Utilizando [2.14], de la ecuación anterior se obtiene la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [2.23]$$

Como puede apreciarse, la ecuación [2.23] no se ve alterada por la interacción electromagnética y expresa el hecho de que la masa total se conserva, es decir, que la masa total en cualquier elemento de volumen del sistema sólo puede cambiar si la materia fluye a través del elemento de volumen.

La ecuación [2.22] en términos del volumen específico $v = 1/\rho$, se puede escribir como

$$\rho \frac{dv}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [2.24]$$

Para el caso de un fluido incomprensible, se tiene simplemente $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

2.2.5.2 Conservación de Momento Lineal

La ecuación de balance de momento en su forma integral es la siguiente (Cuevas, 1989)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = - \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \mathbf{f} dV. \quad [2.25]$$

La integral de superficie del lado derecho considera las fuerzas de superficie que se presentan en el fluido, donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos mecánicos. La segunda integral del lado derecho toma en cuenta las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido, siendo \mathbf{f} la densidad de fuerza de cuerpo. Mediante el

teorema de transporte de Reynolds y utilizando la ecuación de balance de masa [2.22], se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV, \quad [2.26]$$

Mientras que, utilizando el teorema de Gauss, se tiene que

$$\int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV. \quad [2.27]$$

Sustituyendo [2.26] y [2.27] en la ecuación [2.25] se obtiene la forma diferencial de la ecuación de balance de momento lineal, es decir

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}. \quad [2.28]$$

El efecto del campo electromagnético se incorpora a través de la fuerza de Lorentz, la cual es una fuerza de cuerpo. Para obtener la densidad de fuerza de Lorentz se deben tener presentes algunas consideraciones.

La fuerza sobre una carga eléctrica depende de los campos eléctricos y magnéticos presentes y de la velocidad con que se desplaza dicha carga. En todo punto del espacio se caracteriza por dos cantidades vectoriales, la primera es la fuerza eléctrica que da una componente de la fuerza que es independiente del movimiento de la carga, y se describe por medio del campo eléctrico en la forma $z\mathbf{E}$. La segunda componente es la fuerza magnética cuya dirección y módulo dependen de la dirección y la velocidad con que se mueve la partícula siendo siempre perpendicular al vector velocidad y al campo magnético. Así la fuerza magnética se puede expresar como $z\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. la ley de Lorentz para la fuerza electromagnética es entonces

$$\mathbf{F} = z(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad [2.29]$$

Para un medio continuo que contenga partículas cargadas, la densidad de carga ρ_e está dada por ρz .

Asimismo, la densidad de corriente eléctrica total \mathbf{I} puede escribirse en términos de la velocidad \mathbf{u} de la sustancia, como

$$\mathbf{I} = \rho z \mathbf{u} + \mathbf{j}, \quad [2.30]$$

Donde $\rho z \mathbf{u}$ es la corriente eléctrica debida a la convección y \mathbf{j} es la corriente de conducción. Entonces para un medio continuo con densidad de carga ρz y densidad de corriente \mathbf{I} , la ecuación [2.29] se transforma en la densidad de fuerza

$$\mathbf{f} = \rho z \mathbf{E} + \mathbf{I} \times \mathbf{B}. \quad [2.31]$$

de modo que para un fluido conductor que se desplaza en un campo magnético la ecuación de balance de momento es

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho z \mathbf{E} + \mathbf{I} \times \mathbf{B}. \quad [2.32]$$

Utilizando la ecuación [2.30] esta ecuación se puede escribir como

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho z (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad [2.33]$$

2.2.5.3 Balance de energía

La forma integral de la ecuación de balance de la energía es la siguiente (Cuevas, 1989)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV = - \int_A \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} da - \int_A (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} da + \int_V \mathbf{I} \cdot \mathbf{E} dV. \quad [2.34]$$

El miembro izquierdo de la ecuación anterior representa la tasa de cambio temporal de la energía contenida en el volumen V , donde ρe y $\rho u^2/2$ son las densidades de energía interna y cinética respectivamente. El primer término del miembro derecho representa la transferencia de calor por conducción térmica debida a la diferencia de temperaturas en el fluido, donde \mathbf{J}_q denota el flujo de calor. Este término indica como fluye el calor en la superficie de volumen V . el segundo término del lado derecho representa el flujo de energía a través de la superficie, tanto por transporte de masa como por procesos de fricción interna. El

último término representa la tasa de cambio temporal a la cual el campo electromagnético hace trabajo sobre el fluido V , esta potencia representa una conversión de energía electromagnética en energía mecánica o térmica.

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds y la ecuación de balance de masa se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dV = \int_V \rho \left(\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt} \right) dV, \quad [2.35]$$

Y del teorema de Gauss

$$\int_A \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_q dV, \quad [2.36]$$

$$\int_A (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) dV, \quad [2.37]$$

De donde la ecuación [2.34] puede expresarse en la siguiente forma diferencial

$$\rho \left(\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}. \quad [2.38]$$

Esta ecuación se puede reescribir en la forma

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \mathbf{u} \cdot \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}, \quad [2.39]$$

Y con la ayuda de la ecuación de conservación de momento [2.32] y las ecuaciones [2.30], [2.39] toma la forma

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad [2.40]$$

Ya que

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{u}, \quad [2.41]$$

Donde p es la presión, usando [2.24], se obtiene

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \rho p \frac{dv}{dt} - \boldsymbol{\tau}' : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad [2.42]$$

Donde τ' es el tensor de esfuerzos viscosos. Esta ecuación es la formulación local de la primera ley de la termodinámica y establece que la energía interna por unidad de volumen y tiempo puede variar debido a flujo de calor e interacciones mecánicas o electromagnéticas.

2.2.6 Ecuaciones básicas de la MHD

Las ecuaciones anteriores pueden ser simplificadas mediante la aproximación MHD que se basa en las siguientes suposiciones (Hughes, 1989)

- La velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz (aproximación no relativista, $u^2 \ll c^2$).
- Los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias.
- Los campos eléctricos son del orden de magnitud de la fuerza electromotriz (fem) inducida, $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

Con estas suposiciones se pueden incluir simplificaciones adicionales en las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido conductor en un campo magnético. Primeramente, en esta aproximación, se desprecia la corriente de desplazamiento de Maxwell, $\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, en la ecuación [2.19]. Esta es una aproximación que comúnmente se hace en cualquier problema de electromagnetismo donde no intervienen oscilaciones de alta frecuencia (Hughes, 1989), y significa que se desprecia el proceso de acumulación o redistribución de cargas eléctricas.

En la mayoría de los problemas de flujos de metales líquidos en campos magnéticos es común que la magnitud de los términos \mathbf{E} y $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ sean del mismo orden, esto quiere decir físicamente que los campos eléctricos son del orden de magnitud de los efectos inducidos, lo que equivale a suponer que el campo magnético inducido es mucho menor que el campo magnético aplicado.

Por otra parte, obteniendo el cociente de la magnitud de los términos $\rho z \mathbf{E}$ y $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$ que aparecen en la fuerza de Lorentz [2.31], y suponiendo que $|\mathbf{E}| \approx |\mathbf{u} \times \mathbf{B}|$, se

encuentra que dicho cociente es de orden u^2/c^2 , por lo que el término eléctrico en la fuerza de Lorentz resulta despreciable comparado con $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$. Una consideración similar se puede llevar a cabo para comparar los términos $\rho \mathbf{z} \mathbf{u}$ y \mathbf{j} de la densidad de corriente eléctrica total [2.30], encontrándose que la corriente convectiva $\rho \mathbf{z} \mathbf{u}$ es despreciable en esta aproximación; por consiguiente, la corriente de conducción \mathbf{j} se toma como la corriente total \mathbf{I} , y de la ecuación [2.31] se obtiene que $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Un análisis detallado de los órdenes de magnitud de las cantidades anteriores puede encontrarse en (Hughes, 1989).

Tomando en cuenta las aproximaciones anteriores, las ecuaciones fundamentales de la MHD para un fluido conductor en presencia de un campo magnético, expresadas en forma diferencial, son:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad [2.43]$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad [2.44]$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad [2.45]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [2.46]$$

$$\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{j}, \quad [2.47]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad [2.48]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [2.49]$$

Donde se ha omitido la ecuación de Gauss para el campo eléctrico, ya que ρ_e no es de interés en la MHD y además los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} quedan determinados por las ecuaciones restantes [2.46-2.49] y la ecuación constitutiva para \mathbf{j} (ley de Ohm), que se dará más adelante.

2.2.7 Producción de entropía

Una vez obtenidas las ecuaciones de conservación es posible obtener una forma explícita para el flujo y la producción de entropía. De acuerdo a los principios formulados anteriormente, introduciendo en la expresión [2.15], que representa el balance de entropía obtenido a partir de la ecuación de Gibbs, la ecuación [2.42], se obtiene

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \left(\frac{J_q}{T} \right) - \frac{1}{T^2} J_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \tau' : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad [2.50]$$

Comparando esta ecuación con la ecuación [2.13] se observa que el flujo de entropía está dado por

$$J_s = \frac{1}{T} J_q, \quad [2.51]$$

Y la producción de entropía por

$$S = \frac{1}{T^2} J_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad [2.52]$$

La ecuación [2.51] muestra que para sistemas abiertos, el flujo de entropía está dado a través del flujo de calor J_q , mientras que la expresión [2.52] muestra que la producción de entropía contiene tres diferentes contribuciones, que producen las irreversibilidades del sistema. El primer término del lado derecho de [2.52] surge de la conducción de calor, el segundo está relacionado con los procesos de fricción en un flujo viscoso y el tercero se debe a la conducción de electricidad, evidentemente este último término no existe en el caso de fluidos no conductores de electricidad. La estructura de la expresión para \dot{S} es una forma bilineal, ya que consiste de la suma de términos que son el producto escalar de dos factores, que se identifican con un flujo y un término que da lugar al flujo, es decir, tomando en cuenta sólo efectos directos se puede decir que el segundo factor se relaciona con la causa que experimentalmente se ha establecido que da lugar al proceso irreversible y que generalmente se manifiesta como el gradiente de una variable de estado intensiva o como una fuerza externa como el caso electromagnético. De

esta manera el flujo de calor se relaciona con el gradiente de temperatura, los fenómenos viscosos se atribuyen a gradientes de velocidades y el movimiento de partículas cargadas se origina por los campos electromagnéticos.

De todo lo anterior se infiere que el conjunto de ecuaciones de conservación junto con la de balance de entropía y las ecuaciones de estado, contienen a los flujos irreversibles como incógnitas y por tanto deben darse ecuaciones fenomenológicas adicionales que relacionan a los flujos y las fuerzas termodinámicas, para poder obtener un sistema de ecuaciones cerrado que pueda resolverse para las condiciones iniciales y de frontera dadas. Estas relaciones constitutivas para los flujos de calor, momento y corriente eléctrica, en ausencia de efectos cruzados, son las leyes ordinarias de Fourier, Navier-Newton y Ohm, respectivamente, establecen relaciones lineales entre los flujos y los gradientes o fuerzas generalizadas que dan lugar a los procesos irreversibles.

$$\mathbf{J}_q = -k\nabla T, \quad [2.53]$$

$$\boldsymbol{\tau}' = -\lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{1} - \eta(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T), \quad [2.54]$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad [2.55]$$

Donde k, λ, η y σ son la conductividad térmica, el segundo coeficiente de viscosidad, la viscosidad dinámica y la conductividad eléctrica del fluido, respectivamente. El superíndice T significa que es la matriz transpuesta del gradiente de velocidad y $\mathbf{1}$ es el tensor unitario.

Si se sustituyen estas relaciones lineales en [2.52], podemos darnos cuenta de que se presenta una forma cuadrática respecto a las fuerzas generalizadas. Por lo tanto, para que la producción de entropía sea positiva los coeficientes de transporte $(k, \lambda, \eta$ y $\sigma)$ deben ser positivos, lo que concuerda con los experimentos.

2.2.8 Magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica (MHD) cubre todos los dominios donde un fluido conductor de electricidad, el campo magnético y el campo de velocidad están acoplados. Este acoplamiento es debido a la interacción entre dos disciplinas que son el electromagnetismo y la hidrodinámica.

Se puede citar por ejemplo los electrolitos, los plasmas (gas de partículas ionizadas) y los metales líquidos. Los parámetros físicos (intensidad de las inducciones magnéticas y de los campos eléctricos, velocidad de circulación del fluido, presión, masa volumétrica, etc.) que intervienen dentro de estos sistemas pueden variar en varios órdenes de magnitud según las aplicaciones.

2.2.9 Nanofluido

Un Nanofluido es una suspensión de nanopartículas metálicas en un fluido convencional. Estas nanopartículas mejoran algunas de las propiedades de transporte de los fluidos, como es la conductividad térmica, aun estando a pequeñas concentraciones (5% en volumen). Las nanopartículas pueden incrementar la conductividad porque mejoran la micromezcla: al aumentar el gradiente de velocidades, rotan e interaccionan entre sí moviendo al líquido que las rodea. Por el gradiente de velocidades, también se puede estabilizar una micro-estructura que mejore la transferencia de calor.

El efecto depende del tamaño, forma y material de las nanopartículas (las nanopartículas cilíndricas son más eficaces que las esféricas).

Algunas de las aplicaciones de las nanopartículas son: microelectrónica, sistemas de acondicionamiento de aire, refrigeración en ordenadores, centrales energéticas (rujas, 2012).

2.2.9.1 Propiedades termofísicas de nanofluidos

2.2.9.1.1 Densidad

La densidad de un nanofluido (ρ_{nf}) puede calcularse a partir de la siguiente relación:

$$\rho_{nf} = \rho_f(1 - \varphi) + \rho_p\varphi \quad [2.56]$$

donde ρ_f es la densidad del fluido de base, ρ_p es la densidad de las nanopartículas, y φ es la fracción de volumen de las nanopartículas. Esta correlación popular es independiente de la temperatura (Omid Mahian, 2013).

2.2.9.1.2 Calor específico

Hay dos expresiones para calcular el calor específico (C_{nf}) de nanofluidos. La primera relación se lee:

$$C_{nf} = \frac{\rho_f C_f(1 - \varphi) + \rho_p C_p \varphi}{\rho_{nf}} \quad [2.57]$$

donde C_f y C_p son los calores específicos del fluido base y nanopartículas, respectivamente. Alternativamente:

$$C_{nf} = (1 - \varphi)C_f + C_p\varphi \quad [2.58]$$

La revisión de la literatura muestra que la mayoría de los autores utilizan la Ec [2.57] para estimar el calor específico del nanofluidos en problemas de generación de entropía (Omid Mahian, 2013).

2.2.9.1.3 Viscosidad

El modelo de Einstein, basado en la teoría cinética, es el más antiguo que se utiliza para determinar la viscosidad del nanofluido (η_{nf}):

$$\eta_{nf} = \eta_f(1 - 2.5\varphi) \quad [2.59]$$

donde η_f es la viscosidad del fluido base y esta relación es útil para $\varphi \leq 2\%$. Singh et al. modificó la relación anterior con base en varios datos experimentales en la literatura para Al_2O_3 -agua nanofluido. Sugirieron la siguiente relación:

$$\eta_{nf} = \eta_f(1 - 10\varphi) \quad [2.60]$$

Sin embargo, la relación más común que se ha utilizado para calcular la viscosidad en los problemas de generación de entropía es el modelo Brinkman.

$$\eta_{nf} = \frac{\eta_f}{(1-\varphi)^{2.5}} \quad [2.61]$$

2.2.9.1.4 Conductividad térmica

El modelo de Maxwell es el enfoque más antiguo para calcular la conductividad térmica de las mezclas de sólido-líquido, donde

$$k_{nf} = \frac{k_p + 2k_f + 2\varphi(k_p - k_f)}{k_p + 2k_f - \varphi(k_p - k_f)} k_f \quad [2.62]$$

En la relación anterior k_f , k_p y k_{nf} son conductividades térmicas del fluido base, nanopartículas, y nanofluido, respectivamente. Este modelo es utilizable donde $\varphi \ll 1$ o la magnitud de $\left| \frac{k_p}{k_f} - 1 \right|$ es muy inferior a uno (Omid Mahian, 2013).

2.3 Conclusión

El marco teórico utilizado en la presente tesis está basado en temas específicos tales como: la termodinámica irreversible lineal, hipótesis de la TIL, balance de entropía, ecuaciones de campo electromagnético, ecuaciones de balance para un fluido conductor de electricidad en presencia de un campo electromagnético, producción de entropía, magnetohidrodinámica y nanofluido; Cada tema se desarrolló con la finalidad de aportar conocimientos claros para así dar cumplimiento a cada uno de los objetivos planteados en la presente tesis.

CAPÍTULO 3. MODELADO MATEMÁTICO

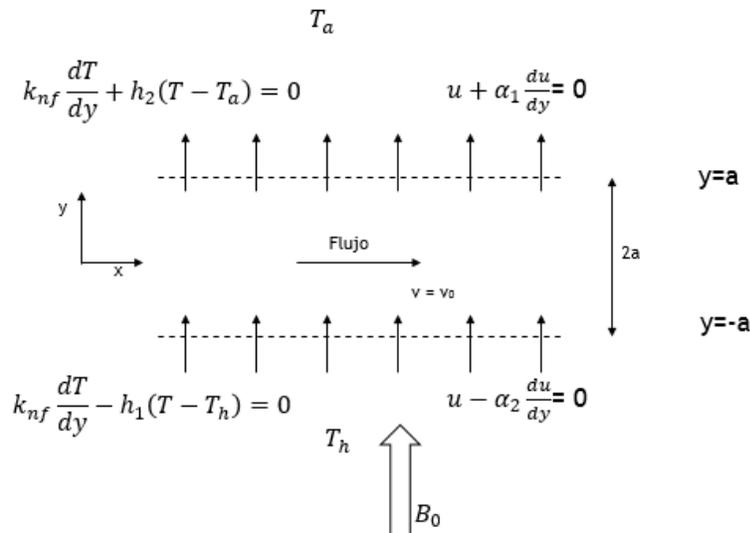
3.1 Introducción

Con base a los fundamentos teóricos matemáticos se va a determinar el campo de velocidad considerando el deslizamiento en las paredes, también se estudiará el comportamiento térmico tomando en cuenta condiciones térmicas de tercer tipo, es decir se considera la transferencia de calor por convección entre el fluido y sus alrededores.

Para determinar la producción de entropía de manera explícita en el sistema MHD a estudiar es necesario encontrar los comportamientos dinámico y térmico. Para esto, se resuelven las ecuaciones de balance del fluido tomando en cuenta las ecuaciones de la teoría electromagnética bajo la aproximación MHD y otras suposiciones que se consideren.

Este capítulo tiene como objetivo explicar el desarrollo del procedimiento matemático que conlleva a la descripción del comportamiento del sistema. Por lo tanto, en esta parte se empieza dando una descripción del sistema de interés y con base en esto se determinan las expresiones que nos describen el comportamiento dinámico y térmico. Por último se encuentra el desarrollo de la expresión local y global de entropía.

3.2 Consideraciones básicas del Sistema



Esquema 3.1. Flujo magnetohidrodinámico de un nanofluido a través de 2 placas porosas

Flujo completamente desarrollado de un nanofluido MHD viscoso incompresible a través de un canal con 2 placas porosas horizontales paralelas separadas por una distancia $2a$ en presencia de un gradiente de presión longitudinal constante dp/dx y bajo un campo magnético transversal uniforme B_0 . La placa superior está localizada en $y = a$ y la placa inferior en $y = -a$. Se supone placas paralelas infinitas de modo que los perfiles de velocidad y temperatura sean completamente desarrollados. Se inyecta nanofluido de manera uniforme en el canal en la placa inferior y se succiona en la placa superior. El canal inferior intercambia calor por convección con un medio (fluido) caliente con temperatura T_h , mientras la superior está en contacto con el ambiente. Para la solución de la ecuación de balance de momento suponemos que la velocidad satisface la condición de deslizamiento en las placas. Así mismo la ecuación de balance de energía se resuelve con condiciones de tercer tipo (transferencia de calor sistema-medio).

3.3 Campo de Velocidad

Para determinar el campo de velocidad, primeramente se determina la ecuación de balance de momento que describe al sistema de estudio, tomando en cuenta las suposiciones que lo caracterizan (ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes).

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [3.1]$$

$$\rho \left(\frac{d\vec{u}}{dt} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad [3.2]$$

$\mathbf{u}, P, \rho, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{j}$ y \mathbf{B} son el campo de velocidad, presión, densidad, tensor de esfuerzos, densidad de corriente eléctrica y campo magnético.

La ecuación de balance de momento se basa en la segunda ley de Newton donde nos menciona que la fuerza es equivalente a la masa del objeto por su aceleración, de tal manera que, el primer término del lado izquierdo de la ecuación corresponde a la masa por la aceleración y todos los términos de la parte derecha son las fuerzas que actúan sobre el fluido

Considerando la ecuación de continuidad, que el gradiente de presión está en dirección axial y que el vector velocidad tiene una única componente en el eje de las x dependiente de la coordenada transversal, $u = \mathbf{u}(u(y), v_0, 0)$ la ecuación [2.2], para el sistema magnetohidrodinámico, se reduce a

$$v_0 \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{dp}{dx} + \frac{\eta_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{d^2u}{dy^2} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad [3.3]$$

El tercer término del lado derecho de la ecuación [3.3] se expresa como producto vectorial de dos vectores. La expresión explícita se determina tomando en cuenta la ley de Ohm, $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, el vector velocidad es monocomponente y el campo magnético es aplicado de manera transversal, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(0, B_0, 0)$, donde B_0 es la intensidad de campo magnético.

Por tanto la densidad de corriente eléctrica se obtiene de la siguiente manera:

$$\mathbf{j} = \sigma \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = \sigma(0\hat{i} + 0\hat{j} + uB_0\hat{k}) \quad [3.4]$$

La corriente eléctrica generada por el sistema estará en una dirección perpendicular al movimiento del fluido y al flujo de campo magnético, dicha dirección corresponde al eje de la z.

De tal manera que la expresión de la fuerza de Lorentz del sistema será:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \sigma u B_0 \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = -\sigma u B_0^2 \hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \quad [3.5]$$

El producto de ambos vectores corresponde a una fuerza opuesta al sentido de movimiento del fluido.

Sustituyendo [3.5] en [3.3] se obtiene la ecuación de balance de momento que caracteriza el sistema.

$$v_0 \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{dp}{dx} + \frac{\eta_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{d^2u}{dy^2} - \frac{\sigma_{nf} B_0^2}{\rho_{nf}} u \quad [3.6]$$

La ecuación [3.6] se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{d^2u^*}{dy^{*2}} - A C Re \frac{du^*}{dy^*} - B C M^2 u^* = -C P \quad [3.7]$$

Donde la coordenada, y, está normalizada con el valor medio de la distancia entre los planos, a. A, B y C son constantes que simplifican la ecuación y son equivalentes a $\frac{\rho_{nf}}{\rho_f}, \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f}, \frac{\eta_f}{\eta_{nf}}$. Dichas constantes nos dan una relación de las

propiedades del nanofluido y el fluido. Por otro lado $M = B_0 a \sqrt{\sigma/\eta}$, es el número de Hartmann, el cual da una estimación de la fuerza magnética comparada con la fuerza viscosa, $Re = \frac{v_0 a \rho_f}{\eta_f}$ es el número de Reynolds que da una estimación de la

fuerza inercial comparada con la fuerza viscosa. $P = -\frac{a^3 \rho_f}{\eta_f} \frac{dp}{dx}$, donde dp/dx , es el gradiente de presión longitudinal del sistema.

Para la solución de la ecuación [3.7] se propone condiciones de deslizamiento del fluido sobre las paredes, dichas condiciones son:

$$u^* + \alpha_1^* \frac{du^*}{dy^*} = 0 \quad \text{en } y^* = 1 \quad [3.8]$$

$$u^* - \alpha_2^* \frac{du^*}{dy^*} = 0 \quad \text{en } y^* = -1 \quad [3.9]$$

Donde α_1^*, α_2^* representa el deslizamiento en la pared superior e inferior. Proporciona la velocidad en dicha pared cuando el sistema esta completamente desarrollado. Por lo tanto, el perfil de velocidad estará dado por la siguiente solución de la ecuación [3.7].

$$u(y^*) = e^{\frac{ACRe}{2}y} [C_1 \operatorname{sh} Dy + C_2 \operatorname{ch} Dy] + \frac{P}{BM^2} \quad [3.10]$$

Como puede notarse la solución corresponde a una función que depende de las variables que caracterizan al sistema $u = u(Re, M, \alpha_1, \alpha_2, y^*)$ y con ello podemos describir como estos parámetros influyen en los perfiles de velocidad.

Las constantes utilizadas en las ecuaciones anteriores se encuentran en el anexo único.

3.4 Campo de Temperatura

La ecuación de transferencia de calor nos permite conocer el comportamiento térmico del sistema de interés, se escribe como

$$(\rho C_p)_{nf} \left(\frac{dT}{dt} + (\vec{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + \vec{\tau} : \nabla \vec{u} + \vec{j} \cdot \vec{E} \quad [3.11]$$

La ecuación anterior se puede expresar de la siguiente forma.

$$(\rho C_p)_{nf} \left(\frac{dT}{dt} + u \frac{dT}{dx} + v \frac{dT}{dy} + w \frac{dT}{dz} \right) = k_{nf} \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) + 2\eta_{nf} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \right] + \eta_{nf} \left[\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] + \vec{j} \cdot \vec{E} \quad [3.12]$$

Considerando un sistema estacionario y que $u = \mathbf{u}(u(y), v_0, 0)$, es una velocidad con componente en dirección x que sólo depende de la coordenada transversal, y componente constante en la dirección y, la temperatura estará en función de y. Entonces la ecuación se reduce a:

$$(\rho C_p)_{nf} v_0 \frac{dT}{dy} = k_{nf} \frac{d^2 T}{dy^2} + \eta_{nf} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \vec{j} \cdot \vec{E} \quad [3.13]$$

En el último término del lado derecho de la ecuación [3.13], el vector \mathbf{j} es determinado por la ley de Ohm, mientras que el campo eléctrico, \mathbf{E} , es igual al campo eléctrico existente dentro del sistema más la corriente generada por el efecto que ocurre entre el campo de velocidad y el campo magnético ($\mathbf{u} \times \mathbf{B}$). Para el caso de estudio, el campo eléctrico del sistema es despreciable en comparación con la corriente generada por la velocidad y el campo magnético. Dicho término puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{j^2}{\sigma} \quad [3.14]$$

Tomando en cuenta el resultado de la intensidad de corriente eléctrica determinado anteriormente, ver ecuación [3.4], y sustituyendo en la ecuación [3.14], entonces:

$$j \cdot E = \sigma B_0^2 u^2 \quad [3.15]$$

Por tanto la ecuación [3.13] queda de la siguiente manera:

$$(\rho C_p)_{nf} v_0 \frac{dT}{dy} = k_{nf} \frac{d^2 T}{dy^2} + \eta_{nf} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \sigma B_0^2 u^2 \quad [3.16]$$

El miembro izquierdo de la ecuación [3.16] nos proporciona la transferencia de energía por convección, por otro lado, el primer miembro de la parte derecha nos proporciona la transferencia de energía por conducción, el segundo la disipación por fricción y el último término la disipación óhmica.

La ecuación normalizada [2.16] se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 \theta}{dy^{*2}} - Pe \frac{(\rho C_p)_{nf} k_f}{(\rho C_p)_f k_{nf}} \frac{d\theta}{dy^*} = -EcPr \left[\frac{\eta_{nf}}{\eta_f} \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 + M^2 \left(\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} \right) u^{*2} \right] \quad [3.17]$$

Donde $\theta = T - T_a / T_h - T_a$, $y^* = y/a$ y $u^* = u/U_0$ son la temperatura, la coordenada transversal y la velocidad expresadas en forma adimensional, respectivamente. $Pr = (\eta C_p)_f / k_f$, es el número de Prandtl que representa la relación de difusión en el fluido de los efectos viscosos respecto a los efectos térmicos, $Pe = v_0 a (\eta C_p)_f / k_f$ relaciona la velocidad de advección de un flujo y la velocidad de difusión, $Ec = U_0^2 / C_f (T_h - T_a)$ expresa la relación entre la energía cinética de un fluido y su entalpía, $M = B_0 a \sqrt{\sigma / \eta}$ es el número de Hartmann el cual da una estimación de la fuerza magnética comparada con la fuerza viscosa.

Para la solución de la ecuación [3.17] se propone condiciones de tercer tipo, es decir, que existe transferencia de calor por convección entre el sistema y el medio. Dichas condiciones son:

$$\frac{d\theta}{dy^*} + \frac{k_f}{k_{nf}} \theta Bi_2 = 0 \quad \text{en} \quad y^* = 1, \quad [3.18]$$

$$\frac{d\theta}{dy^*} + \frac{k_f}{k_{nf}} Bi_1 (1 - \theta) = 0 \quad \text{en } y^* = -1, \quad [3.19]$$

Donde $Bi_1 = ah_1/k_f$ y $Bi_2 = ah_2/k_f$ son las expresiones adimensionales de los coeficientes convectivos de transferencia de calor de las paredes inferior y superior. Por lo tanto, el perfil de temperatura estará dado por la siguiente solución de la ecuación [3.17].

$$\theta(y) = C_3 + C_4 e^{Pe E_1 E_2 y}, \quad [3.20]$$

Donde $E_1 = (\eta C_p)_{nf}/(\eta C_p)_f$ y $E_2 = k_f/k_{nf}$, C_3 y C_4 se encuentran en el anexo.

3.5 Producción de Entropía Local y Global

Para la producción de entropía local del sistema es necesario tener en cuenta las ecuaciones de Gibbs, balance de entropía, balance de energía y otras relaciones físicas como la conductividad (ley de Fourier) y el flujo de entropía, vistos en el capítulo 1,

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot J_s + \dot{S} \quad [3.21]$$

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad [3.22]$$

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot J_q + \tau : \nabla u + j \cdot (E + u \times B) \quad [3.23]$$

Multiplicando la ecuación (3.22) por ρ/T , y debido a que es un fluido incompresible (no existe variación de densidad en el tiempo) el segundo término de la derecha se desprecia, entonces:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\rho De}{T Dt} \quad [3.24]$$

Igualando [3.21] con [3.24]

$$-\nabla \cdot J_s + \dot{S} = \frac{\rho De}{T Dt} \quad [3.25]$$

Introduciendo la ecuación [3.23] en [3.25]

$$-\nabla \cdot J_s + \dot{S} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot J_q + \frac{1}{T} \tau : \nabla u + \frac{1}{T} j \cdot (E + u \times B) \quad [3.26]$$

Aplicando la regla de vectores al primer término del lado derecho de la ecuación [3.26]

$$\nabla \cdot (fF) = f(\nabla \cdot F) + F \cdot \nabla f \quad [3.27]$$

Donde f es un escalar y F es un vector. Entonces el término se expresa como:

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot J_q = \nabla \cdot \left(\frac{J_q}{T} \right) = \frac{1}{T} (\nabla \cdot J_q) + J_q \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) \quad [3.28]$$

Usando el último término de la derecha de la ecuación [3.28] con la regla

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} \quad [3.29]$$

Donde f y g son escalares. Entonces:

$$\nabla \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{\nabla T}{T^2} \quad [3.30]$$

Igualando la ecuación [3.28] con [3.30]

$$\frac{1}{T} \nabla \cdot J_q = \frac{1}{T} (\nabla \cdot J_q) - \frac{1}{T^2} J_q \cdot \nabla T \quad [3.31]$$

$$-\frac{1}{T} (\nabla \cdot J_q) = \frac{1}{T} (\nabla \cdot J_q) - \frac{1}{T^2} J_q \cdot \nabla T \quad [3.32]$$

Sustituyendo [3.32] en [3.26]

$$-\nabla \cdot J_s + \dot{S} = -\frac{1}{T} (\nabla \cdot J_q) - \frac{1}{T^2} J_q \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \tau : \nabla u + \frac{1}{T} j \cdot (E + u \times B) \quad [3.33]$$

Sabiendo que

$$\nabla \cdot J_s = \frac{1}{T} (\nabla \cdot J_q) \quad [3.34]$$

Entonces la ecuación [3.33] queda como

$$\dot{S} = -\frac{1}{T^2} J_q \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \tau : \nabla u + \frac{1}{T} j \cdot (E + u \times B) \quad [3.35]$$

La ecuación anterior expresa la producción local de entropía para el flujo magnetohidrodinámico. En el primer término del lado derecho se considera la ley de Fourier del flujo de calor.

$$J_q = -k \nabla T \quad [3.36]$$

Para el segundo término, la expresión para un fluido incompresible

$$\tau: \nabla u = -\tau': \nabla u \quad [3.37]$$

Donde

$$-\tau': \nabla u = -\eta\Phi \quad [3.38]$$

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad [3.39]$$

Tomando en cuenta la ley de ohm, el tercer término puede ser expresado como

$$j \cdot (E + u \times B) = \frac{j^2}{\sigma} \quad [3.40]$$

Sustituyendo las equivalencias en la ecuación, entonces

$$\dot{S} = \frac{1}{T^2} k(\nabla T)^2 + \frac{1}{T} \eta\Phi + \frac{1}{T} \frac{j^2}{\sigma} \quad [3.41]$$

Para el caso que se estudia, se debe tomar en cuenta las consideraciones hechas anteriormente, es decir, $T = f(y)$, $u = u(y, v_0, 0)$, $B = B(0, B_0, 0)$ y $E = E(0, 0, 0)$, así pues los términos de la derecha se reducen a

$$k(\nabla T)^2 = k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \quad [3.42]$$

$$\eta\Phi = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad [3.43]$$

$$\frac{j^2}{\sigma} = j \cdot E = \sigma B_0^2 u^2 \quad [3.44]$$

Por lo tanto la generación de entropía local del sistema, considerando un nanofluido queda de la siguiente manera:

$$\dot{S} = \frac{k_{nf}}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \frac{\eta_{nf}}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma_{nf} B_0^2 u^2}{T} \quad [3.45]$$

Normalizando a S^* con k/a^2 y además considerando $\theta = T - T_a/T_h - T_a$, $y^* = y/a$ y $u^* = u/U_0$. La producción local de entropía de forma adimensional es:

$$S^* = \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{d\theta}{dy^*} \right)^2 + \frac{EcPr}{\theta} \left[\frac{\eta_{nf}}{\eta_f} \left(\frac{du^*}{dy^*} \right)^2 + M^2 \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} u^{*2} \right] \quad [3.46]$$

El primer término del lado derecho de la ecuación corresponde a irreversibilidades por flujo de calor, el segundo debido a la fricción viscosa del fluido y el último término por disipación óhmica en el fluido (conducción eléctrica).

3.6 Conclusión

Este capítulo de Modelado Matemático tuvo como finalidad la determinación de las ecuaciones que caracterizan al sistema. El punto de partida fue la solución de las ecuaciones de balance de momento y energía para la obtención, de los campos de temperatura y velocidad. Para la parte de la velocidad se consideró condiciones de frontera que contemplan deslizamiento a través de las paredes, por otra parte, el problema de transferencia de calor para la obtención de la temperatura fue resuelto aplicando condiciones de frontera de tercer tipo (intercambio de calor por convección entre el sistema y el medio). Una vez, conocidos estos campos, se calculó la producción de entropía local y global del sistema.

CAPITULO 4. RESULTADOS

4.1 Introducción

Las ecuaciones que describen el comportamiento térmico y dinámico del sistema, así como las expresiones para determinar la entropía local y global del sistema han sido determinadas en el capítulo anterior. En el presente capítulo se procede a mostrar los resultados obtenidos para los campos de velocidad y temperatura del nanofluido, así como para la entropía local y global haciendo uso de dichas ecuaciones.

Lo anterior demuestra que el objeto de este capítulo de la investigación es explicar los efectos que tienen sobre el comportamiento del sistema cada uno de los parámetros que lo caracterizan y encontrar condiciones óptimas de operación con mínimos de producción de entropía. Para ello, a lo largo de todo el capítulo se comienza analizando desde el sistema más simple hasta el más complejo, es decir el análisis parte de un sistema con un flujo ordinario, sin presencia de campo magnético y luego se considera el flujo MHD. Primeramente se describe el comportamiento dinámico y térmico de los sistemas, y luego se analiza la entropía generada en el sistema buscando condiciones de operación en las cuales se alcancen mínimos de dicha cantidad.

4.2 Comportamiento Dinámico

En la figura 4.1. Perfil de velocidad para diferentes valores de ϕ . $Re=0$, $M=2$, $P=1$, $\alpha = 0.1$ (deslizamiento simétrico). Se puede apreciar como el perfil de velocidad es afectado con la adición de fracciones de partículas sólidas en el fluido. El principal efecto de la adición de fracciones de partículas en el fluido es la disminución de su velocidad. Esto es debido fundamentalmente al incremento de la viscosidad de dicho fluido.

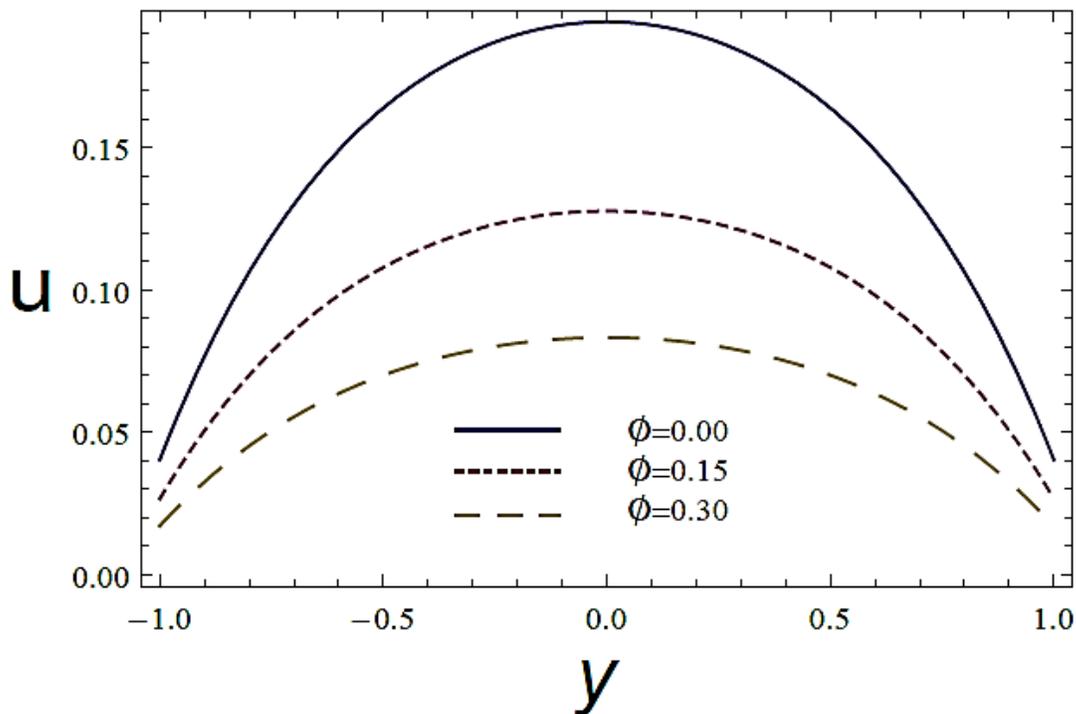


Figura 4.1. Perfil de velocidad para diferentes valores de ϕ . $Re=0$, $M=2$, $P=1$, $\alpha = 0.1$ (deslizamiento simétrico).

Para valores de $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y $\phi = 0$ la ecuación [3.10] se reduce al caso de un flujo MHD sin deslizamiento a través de un canal poroso, mientras que cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\phi = 0$ y $Re = 0$ el perfil de velocidad se reduce a un flujo ordinario de Hartmann sin deslizamiento y a través de paredes no porosas del canal.

El principal efecto del número de Hartmann, el cual da un estimado de las fuerzas magnéticas compradas con las fuerzas viscosas, sobre el perfil de velocidad es aplanar la velocidad de flujo, así como también disminuir sus valores. Esto se manifiesta más claramente a valores altos de dicho parámetro. Por otro lado, Reynolds está asociado a la inyección y succión a través de las placas inferior y superior del sistema, de tal manera que el incremento del número de Reynolds causa un decrecimiento en los valores de velocidad de la parte inferior del canal y un incremento de velocidad en la parte superior del canal obteniéndose un perfil no simétrico desplazado hacia la parte superior del canal (ver figura 4.2).

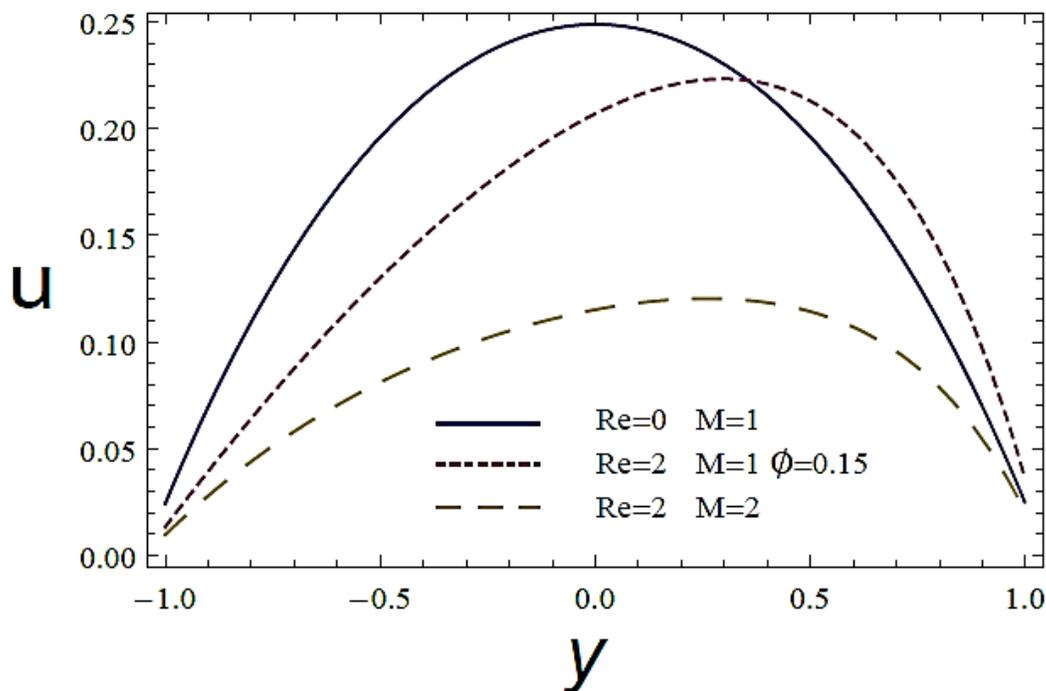


Figura 4.2. Perfil de velocidad para diferentes valores de M y Re . $P=1$, $\alpha = 0.05$ (deslizamiento simétrico), $\phi = 0.15$.

En la figura 4.3 y 4.4. Perfil de velocidad para diferentes valores de Re y α . Se describe el comportamiento dinámico de un flujo ordinario, es decir sin presencia de campo magnético; se puede apreciar cómo afecta el coeficiente de deslizamiento el perfil de velocidad. Se puede notar que cuando se aumenta el deslizamiento los valores de velocidad en las fronteras se desplazan a valores mayores a cero, debido a que el deslizamiento está relacionado directamente con la fricción del nanofluido a través de las paredes y dicha fricción disminuye con el deslizamiento.

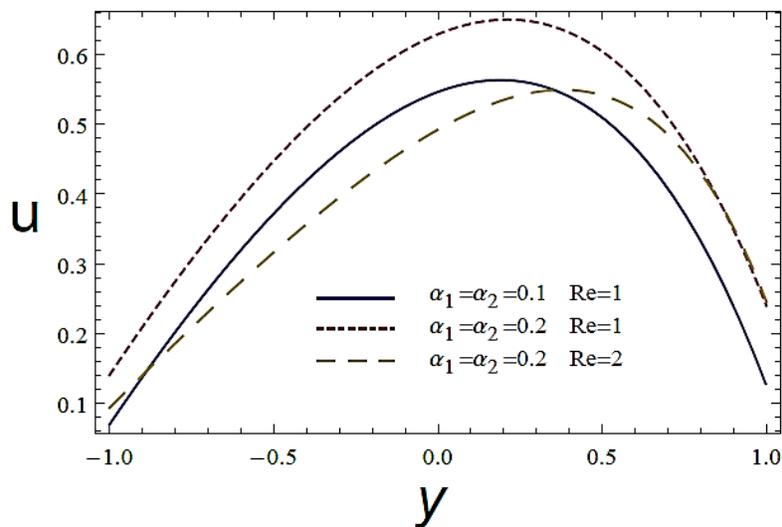


Figura 4.3. Perfil de velocidad para diferentes valores de Re y α . $M=0$, $\phi = 0$.

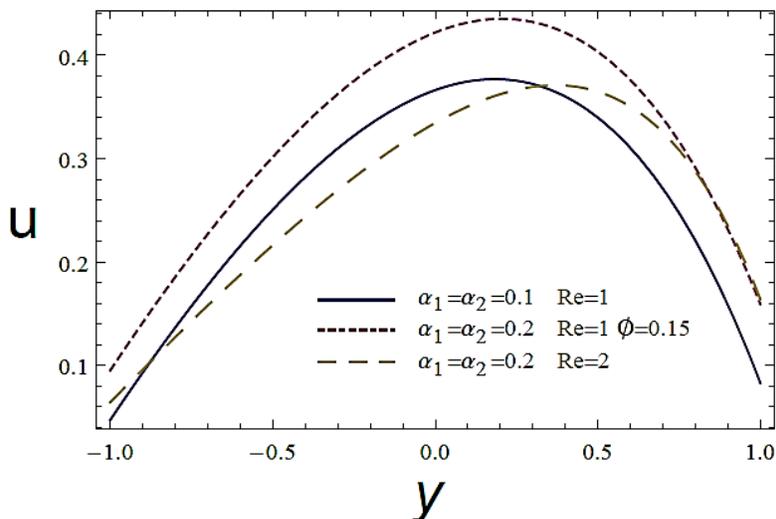


Figura 4.4. Perfil de velocidad para diferentes valores de Re y α . $M=0$, $\phi = 0.15$.

Una vez más podemos apreciar cómo afecta el coeficiente de deslizamiento y el número de Hartmann el perfil de velocidad (ver figuras 4.5 y 4.6).

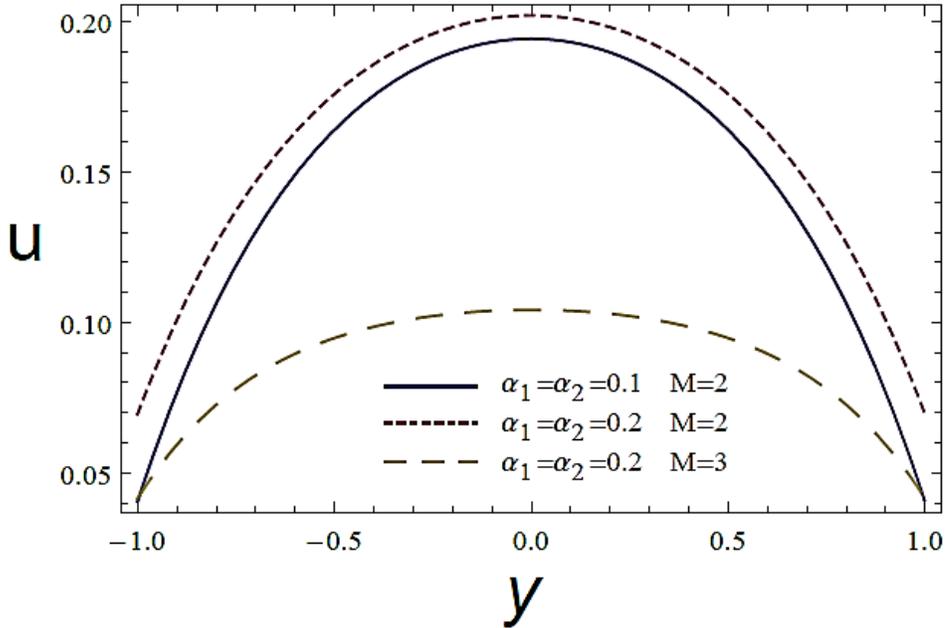


Figura 4.5. Perfil de velocidad para diferentes valores de M y α . $Re=0$, $\phi=0$.

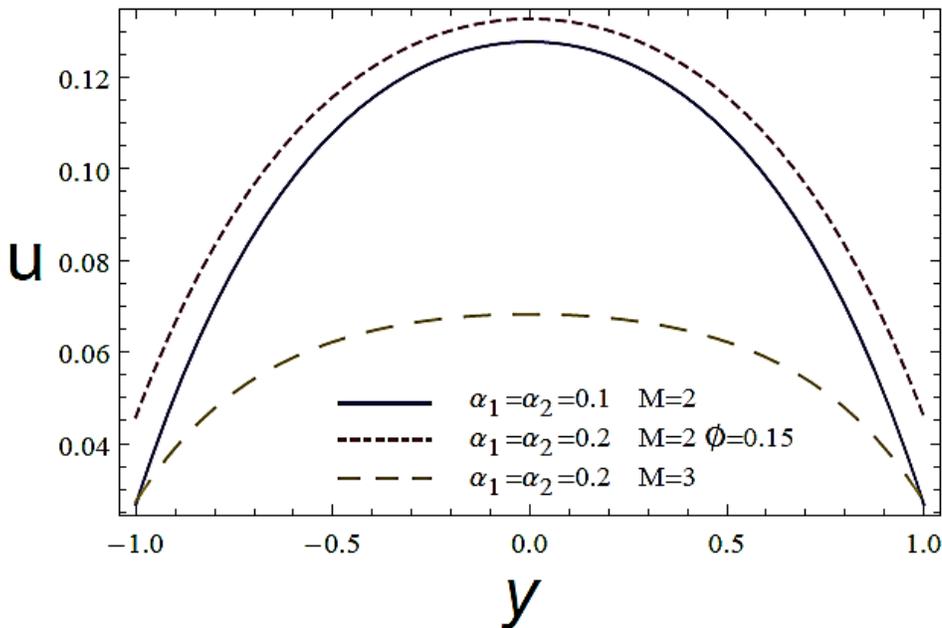


Figura 4.6. Perfil de velocidad para diferentes valores de M y α . $Re=0$, $\phi=0.15$.

4.3 Perfil de temperatura

En la figura 4.7 Perfil de temperatura para diferentes valores de Eckert y Reynolds. Se puede observar que al aumentar el número de Ec , la temperatura en el canal aumenta debido al calentamiento viscoso. Así mismo, cuando el número de Re aumenta, la temperatura también se incrementa debido principalmente al aumento de inyección de fluido caliente a través de la placa porosa inferior. Por otro lado, en la figura 4.8 se observa la adición de fracciones de partículas, estas hacen que la temperatura se concentre en el centro del canal.

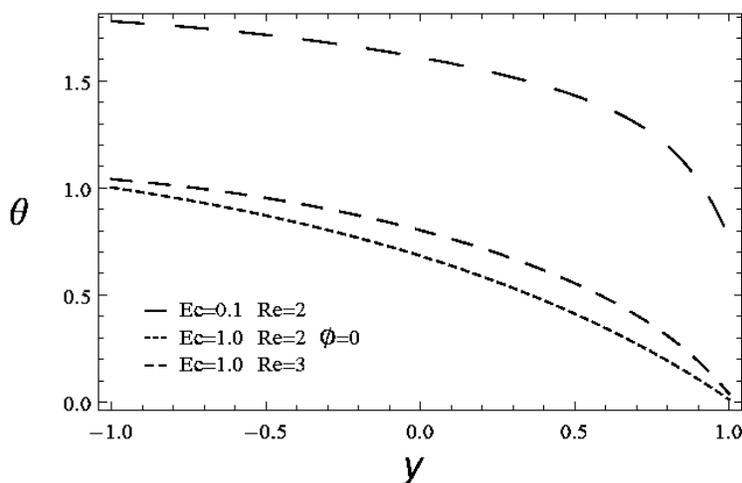


Figura 4.7. Perfil de temperatura para diferentes valores de Eckert y Reynolds. $\phi = 0$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $Bi=1$, $P=1$, $Pe=0.7$, $M=1$

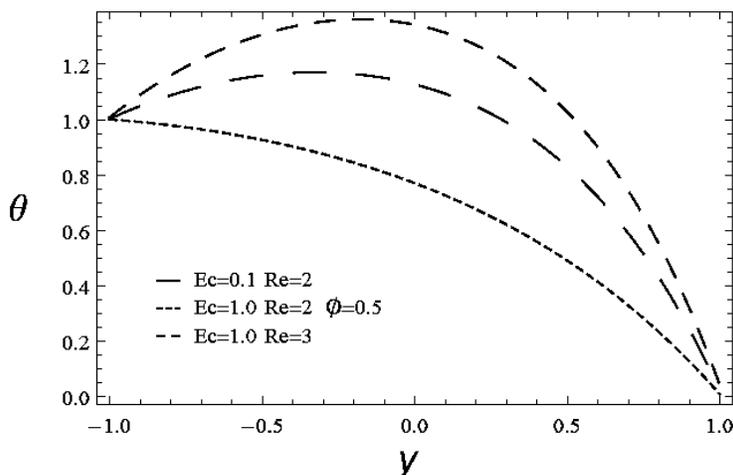


Figura 4.8. Perfil de temperatura para diferentes valores de Eckert y Reynolds. $\phi = 0.5$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $Bi=1$, $P=1$, $Pe=0.7$, $M=1$

En la figura 4.9. Perfil de temperatura para diferentes valores de Peclet y Biot en la placa superior. Se observa que el aumento del número de Peclet incrementa la temperatura del fluido en la zona media inferior del canal y esta disminuye hacia la parte superior del canal, mientras que el incremento del número de Biot en la placa superior hace que disminuya la temperatura ya que la transferencia de calor hacia los alrededores es mayor. Por otro lado en la figura 4.10 se muestra una disminución de la temperatura en las placas debido a la adición de fracciones de partículas en el fluido.

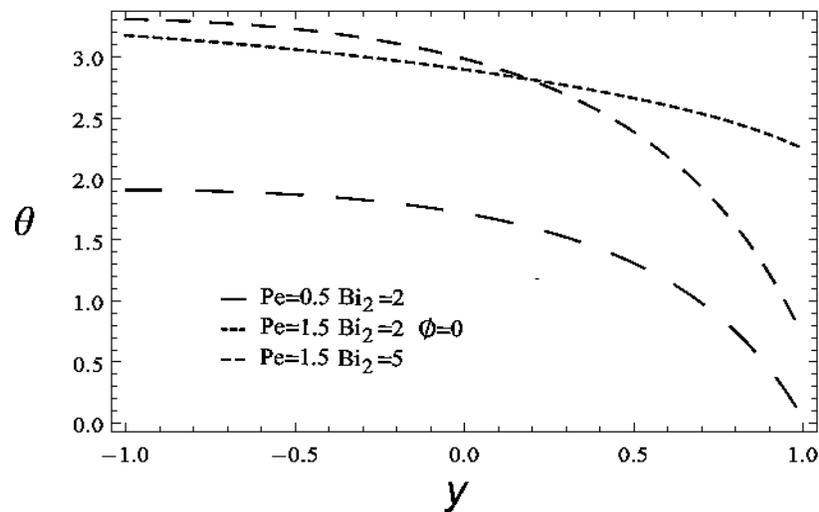


Figura 4.9. Perfil de temperatura para diferentes valores de Peclet y Biot en la placa superior. $\phi = 0$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $Bi_1=10$, $Re=2$, $M=1$, $Ec=1$.

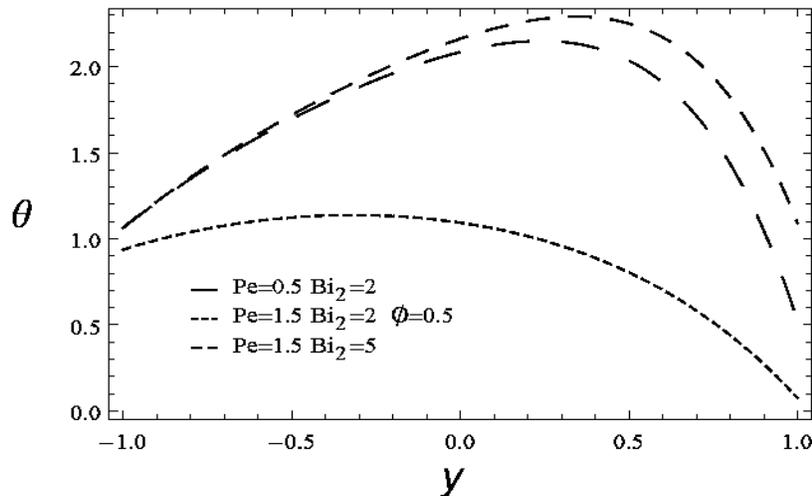


Figura 4.10. Perfil de temperatura para diferentes valores de Peclet y Biot en la placa superior. $\phi = 0.5$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $Bi_1=10$, $Re=2$, $M=1$, $Ec=1$.

En figuras 4.11 y 4.12 podemos observar diferentes perfiles de temperatura para diferentes valores de Peclet. En cada caso podemos observar que el aumento del número de Peclet ocasiona un aumento en la temperatura, pero cabe destacar que la temperatura tiene un mayor incremento cuando existen fracciones de partículas en el fluido, esto debido a que las partículas permiten una mejor conductividad térmica en el fluido.

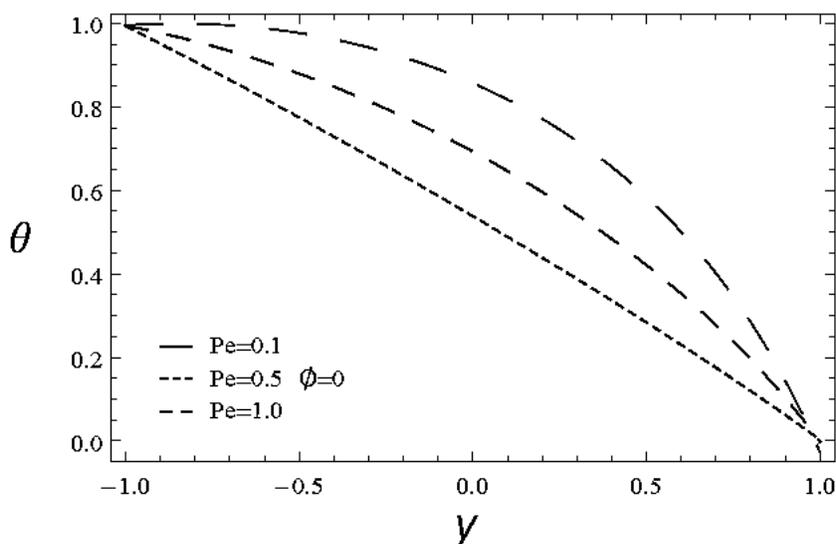


Figura 4.11. Perfil de temperatura para diferentes valores de Pe . $\alpha=0$, $M=1$, $Re=1$, $P=1$, $Ec=1$, $Bi=100$, $\phi = 0$

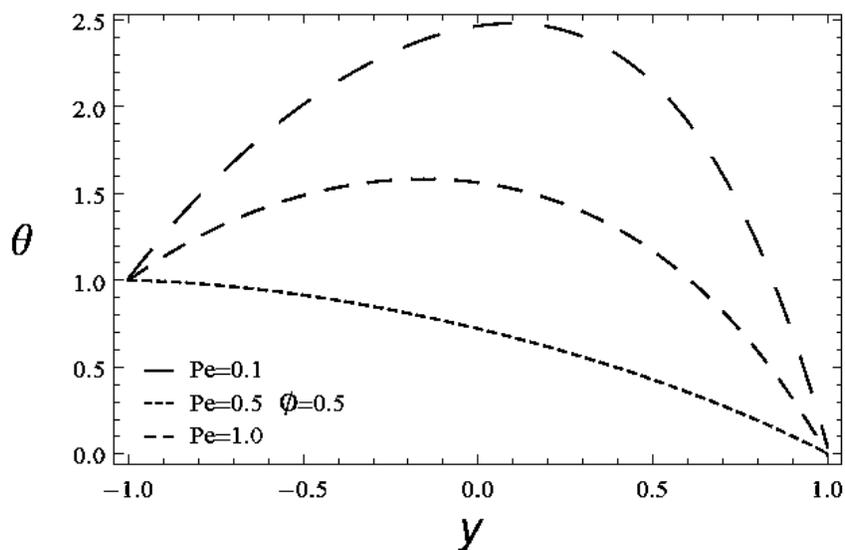


Figura 4.12. Perfil de temperatura para diferentes valores de Pe . $\alpha=0$, $M=1$, $Re=1$, $P=1$, $Ec=1$, $Bi=100$, $\phi = 0.5$

Figura 4.13. Perfil de temperatura para diferentes valores de M , podemos observar el efecto del número de Hartmann en el perfil de temperatura. Podemos notar que al incrementar el campo magnético, la temperatura aumenta debido al aumento de la disipación óhmica. En 4.14 podemos notar el mismo comportamiento con la diferencia que la adición de partículas sólidas permite un incremento mayor de la temperatura.

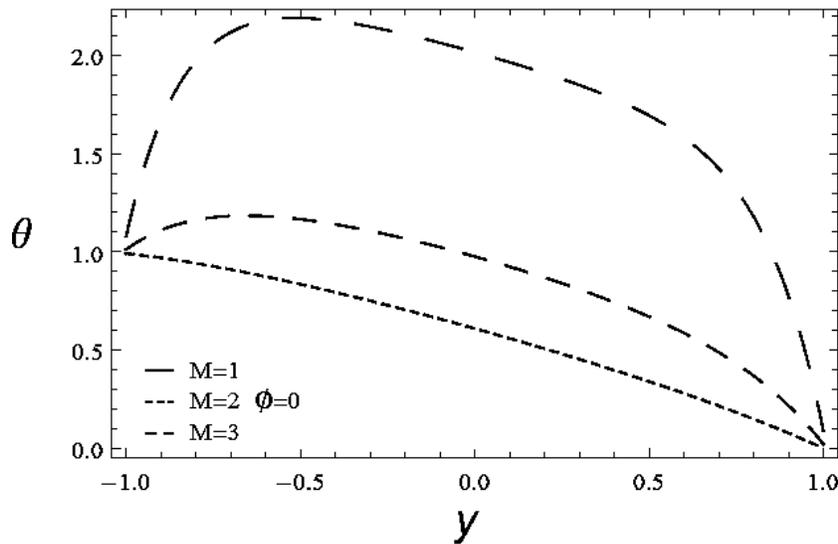


Figura 4.13. Perfil de temperatura para diferentes valores de M . $\alpha=0, Pe=0, Re=0, P=1, Ec=1, Bi=100, \phi = 0$

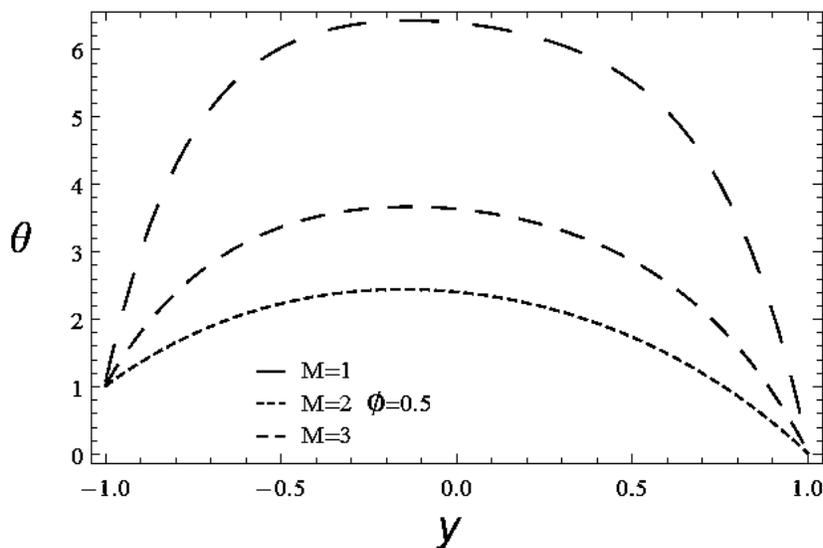


Figura 4.14. Perfil de temperatura para diferentes valores de M . $\alpha=0, Pe=0, Re=0, P=1, Ec=1, Bi=100, \phi = 0.5$

4.4 Entropía Local

Figura 4.15. Entropía local con diferentes valores de Re y Ec . Podemos observar un decrecimiento de la entropía cuando Ec va en aumento debido al aumento de temperatura ocasionada con el calentamiento viscoso. Así mismo, podemos observar que el aumento de Reynolds hace que la entropía también disminuya por el mismo motivo, es decir, el aumento de temperatura. Por otro lado, en la figura 4.16 se observa que el comportamiento de la entropía es muy similar para los diferentes valores cuando ocurre la adición de nanopartículas.

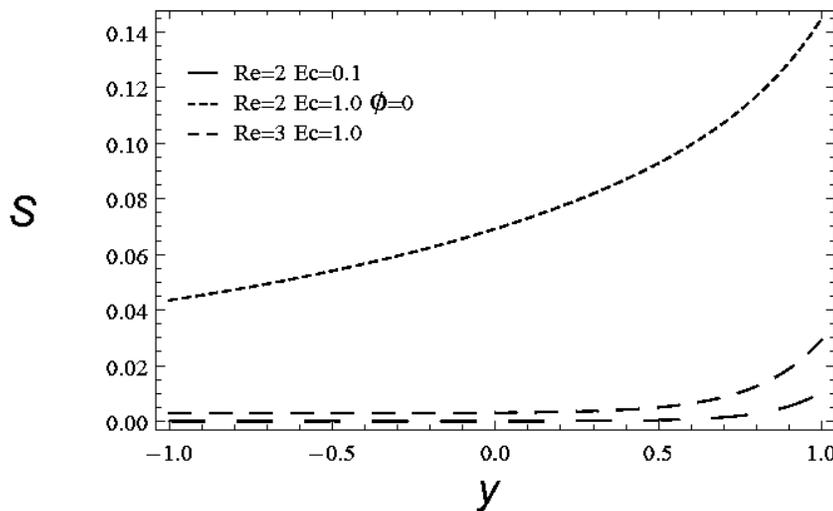


Figura 4.15. Entropía local con diferentes valores de Re y Ec . $Pe=0$, $M=1$, $Bi=1$, $Pr=0.011$.

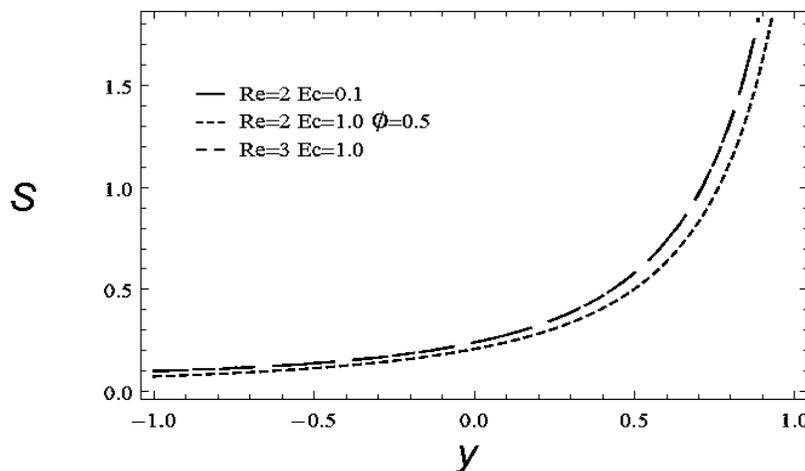


Figura 4.16. Entropía local con diferentes valores de Re y Ec . $Pe=0$, $M=1$, $Bi=1$, $Pr=0.011$.

Figura 4.17 y 4.18. Entropía local con diferentes valores de Pr y Bi_2 . Observamos que la entropía local tiene comportamientos similares. El incremento del número de Prandtl hace que la entropía local vaya a valores superiores, así como también el aumento del número de Biot en la placa superior, esto debido a una disminución de la temperatura del fluido.

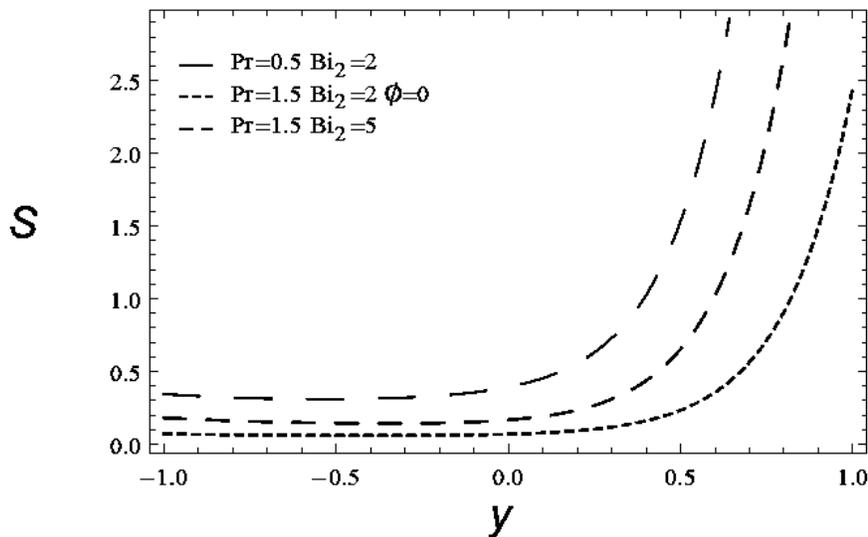


Figura 4.17. Entropía local con diferentes valores de Pr y Bi_2 . $Re=2$, $Pe=0$, $M=1$, $Bi=1$, $Ec=1$.

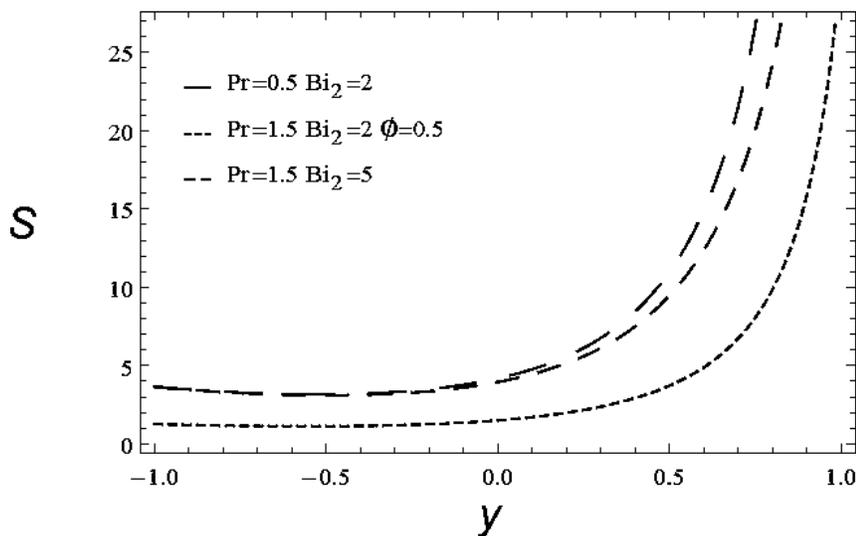


Figura 4.18. Entropía local con diferentes valores de Pr y Bi_2 . $Re=2$, $Pe=0$, $M=1$, $Bi=1$, $Ec=1$.

4.5 Entropía Global

Figura 4.19. Entropía global como función de α_1 , para diferentes valores de ϕ . Se determina el valor óptimo de operación del flujo con mínima generación de entropía global cuando el deslizamiento en la parte inferior de la placa se encuentra entre los valores 0.1 y 0.2, también se aprecia que en este caso el efecto de la adición de nanopartículas sobre la producción de entropía global es muy significativo. Este valor óptimo del deslizamiento en la placa inferior se desplaza hacia valores menores con el aumento de la fracción de volumen de nanopartícula.

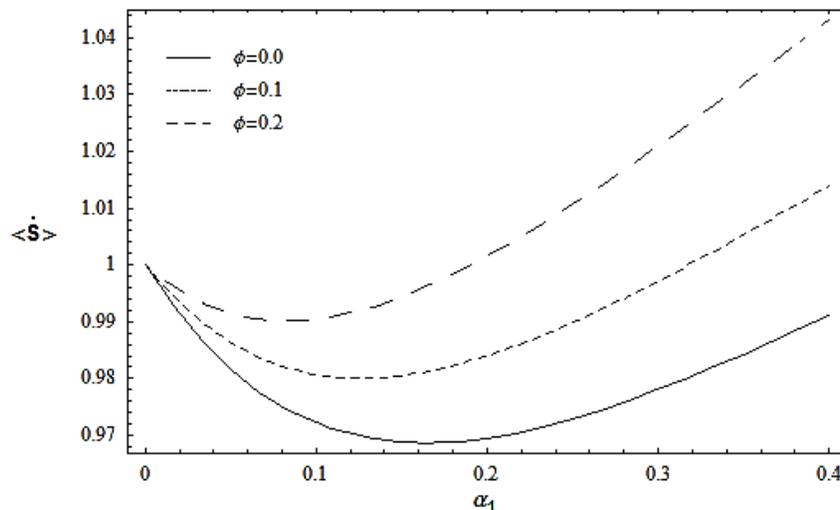


Figura 4.19. Entropía global como función de α_1 , para diferentes valores de ϕ . $Re=1$, $\alpha_2 = 0.01$, $M=2.5$, $P=1$, $Ec=1$, $Pr=1$, $Bi_{1,2} = 1$.

Por otro lado, con la entropía global fue posible encontrar mínimos de entropía para el coeficiente de deslizamiento. Cuando se aumenta el deslizamiento de la pared superior de un flujo MHD disminuye la producción de entropía y el valor óptimo del deslizamiento de la pared inferior donde la entropía es mínima se desplaza hacia valores mayores (Figura 4.20).

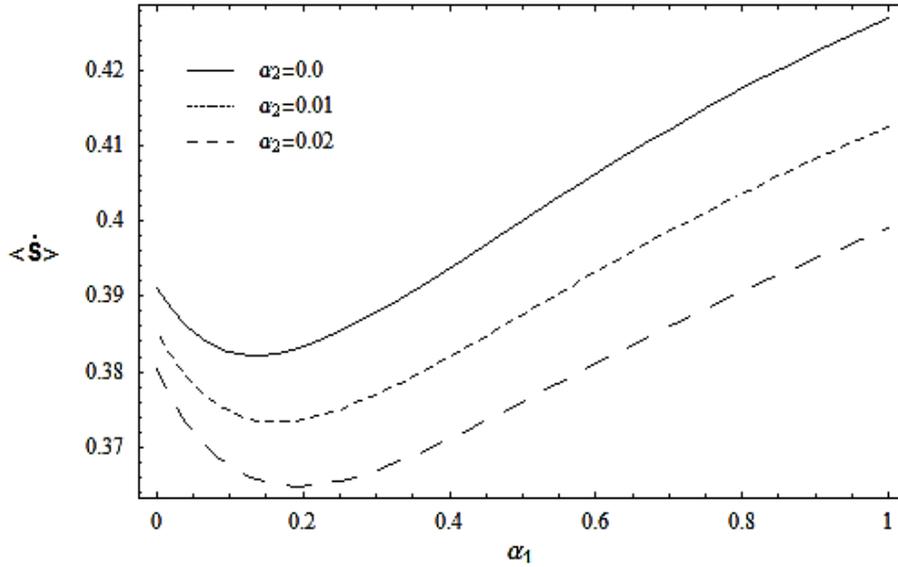


Figura 4.20. Entropía global como función de α_1 , para diferentes valores de α_2 . $Re=1, M=2.5, P=1, Ec=1, Pr=1, Bi_{1,2} = 1, \phi = 0$.

Figura 4.21. Entropía global como función de M , para diferentes valores de ϕ . Se determina el valor óptimo de operación del flujo con mínima generación de entropía global cuando el número de Hartmann se encuentra en el valor 0.75, también se aprecia que en este caso el efecto de la adición de nanopartículas sobre la producción de entropía global es poco significativo.

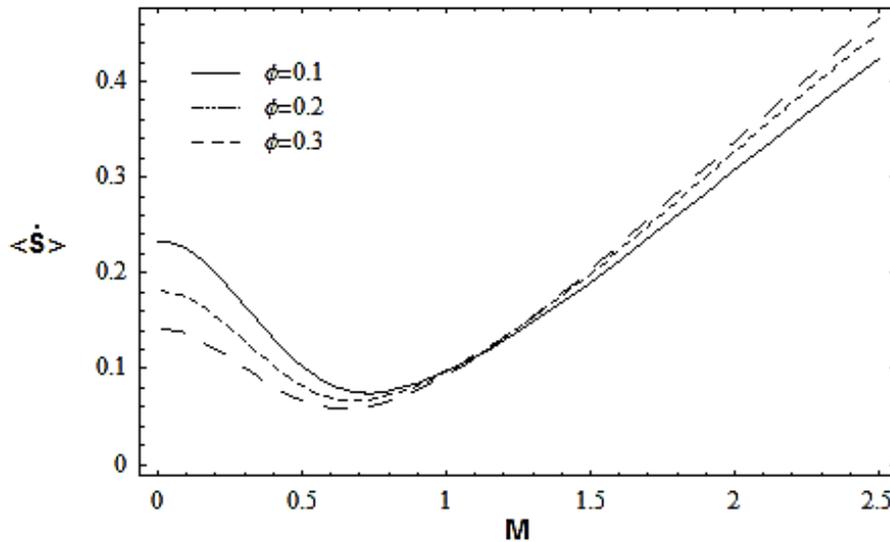


Figura 4.21. Entropía global como función de M , para diferentes valores de ϕ . $Re=1, \alpha_{1,2} = 0.01, P=1, Ec=1, Pr=1, Bi_{1,2} = 1$.

Figura 4.22. Entropía global como función de Bi_1 , para diferentes valores de ϕ y M . Se determina el valor óptimo de operación del flujo con mínima generación de entropía global cuando el número de Biot de la pared inferior está en alrededor de 0.4, también se aprecia que en este caso el efecto de la adición de nanopartículas y del incremento del número de Hartmann es disminuir la generación de entropía en el sistema.

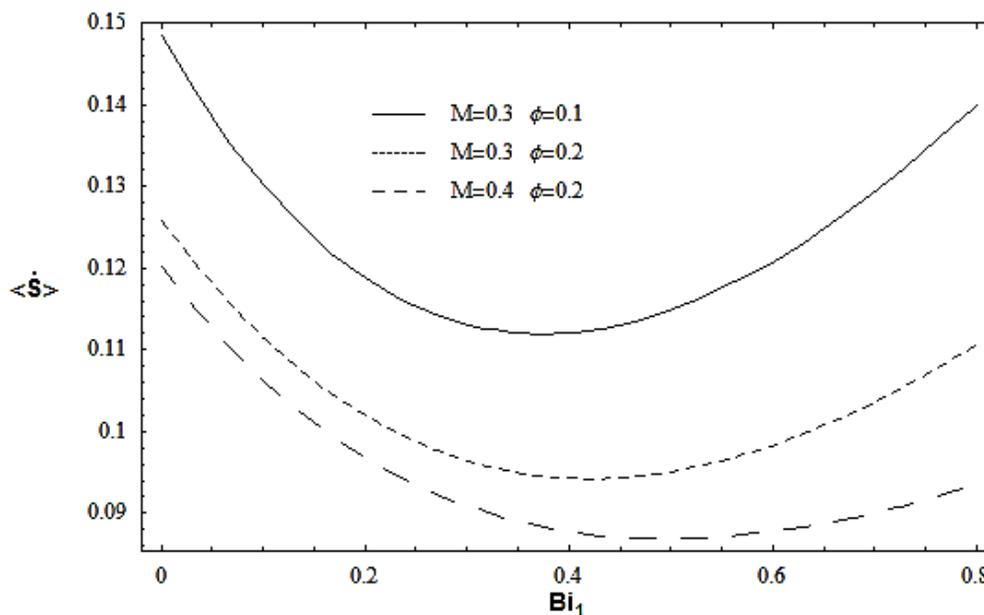


Figura 4.22. Entropía global como función de Bi_1 , para diferentes valores de ϕ y M . $Re=1, \alpha_{1,2} = 0.1, P=1, Ec=1, Pr=1, Bi_2 = 1$.

La figura 4.23 muestra la generación de entropía global como función del número de Eckert, Ec , para diferentes valores de ϕ y M . $Re=1, \alpha_{1,2} = 0.01, P=1, Pr=0.7, Bi_{1,2} = 2$. Valores óptimos de Ec son encontrados. Podemos observar que tanto el incremento del número de Hartmann como el incremento de la fracción de nanopartícula producen un incremento del valor óptimo de Ec donde la entropía es mínima. El mínimo de mínimos se alcanza para $M=0.4$ y $\phi=0.3$ en Ec aproximadamente igual a 0.3. Además la entropía disminuye significativamente con la fracción de nanopartícula.

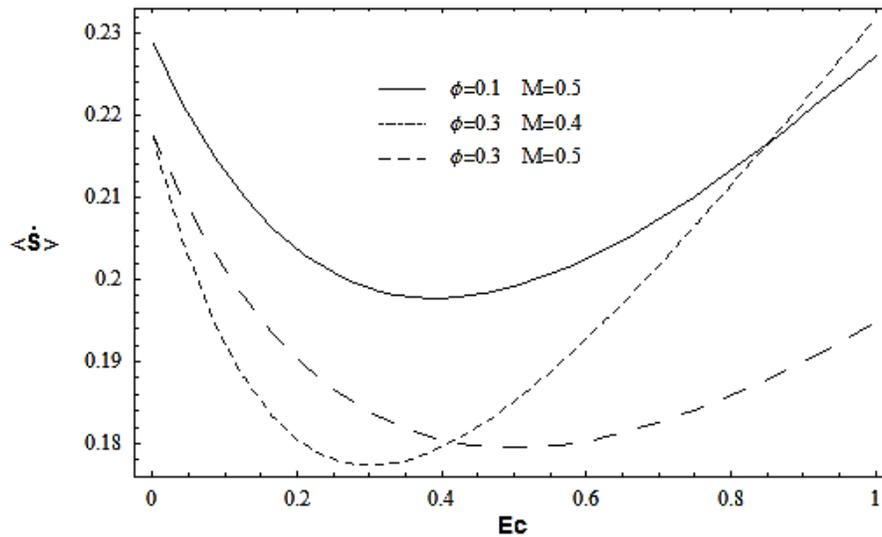


Figura 4.23. Entropía global como función de Ec , para diferentes valores de ϕ y M . $Re=1$, $\alpha_{1,2} = 0.01$, $P=1$, $Pr=0.7$, $Bi_{1,2} = 2$.

En la Figura 4.24. Entropía global como función de M para diferentes valores de ϕ . Se muestra valores óptimos de M . Por otro lado, podemos hacer notar que cuando se incrementa ϕ existe una disminución en la producción de entropía.

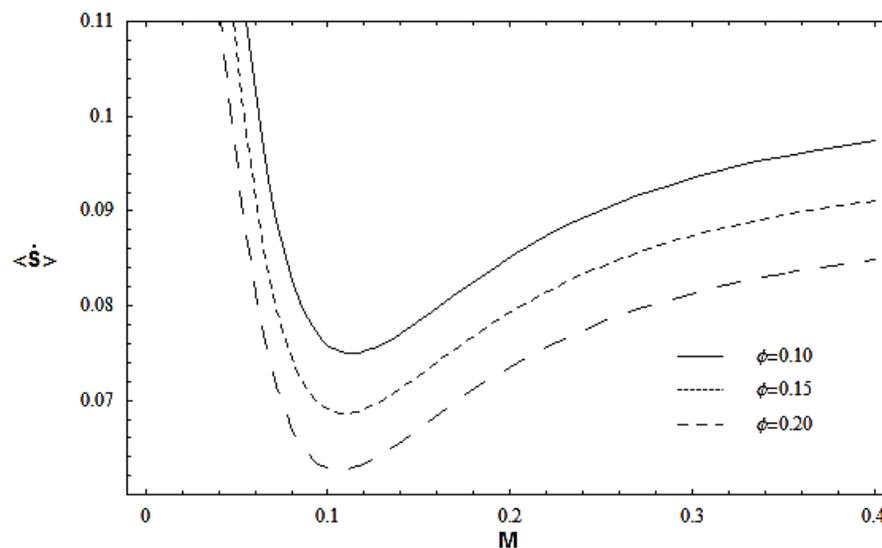


Figura 4.24. Entropía global como función de M para diferentes valores de ϕ . $Re=2$, $\alpha_{1,2} = 0.1$, $P=1$, $Ec=1$, $Pr=0.011$, $Bi_{1,2} = 1$.

La Figura 4.25 muestra la entropía global como función de M para diferentes valores de α y Pr . $Re=2$, $P=1$, $Ec=1$, $\phi = 0.1$ $Bi_{1,2} = 1$. Una vez más, valores mínimos de generación de entropía son encontrados en las curvas. Estos mínimos se desplazan a valores más altos de M cuando Pr se incrementa y se mantienen prácticamente constantes cuando α se incrementa.

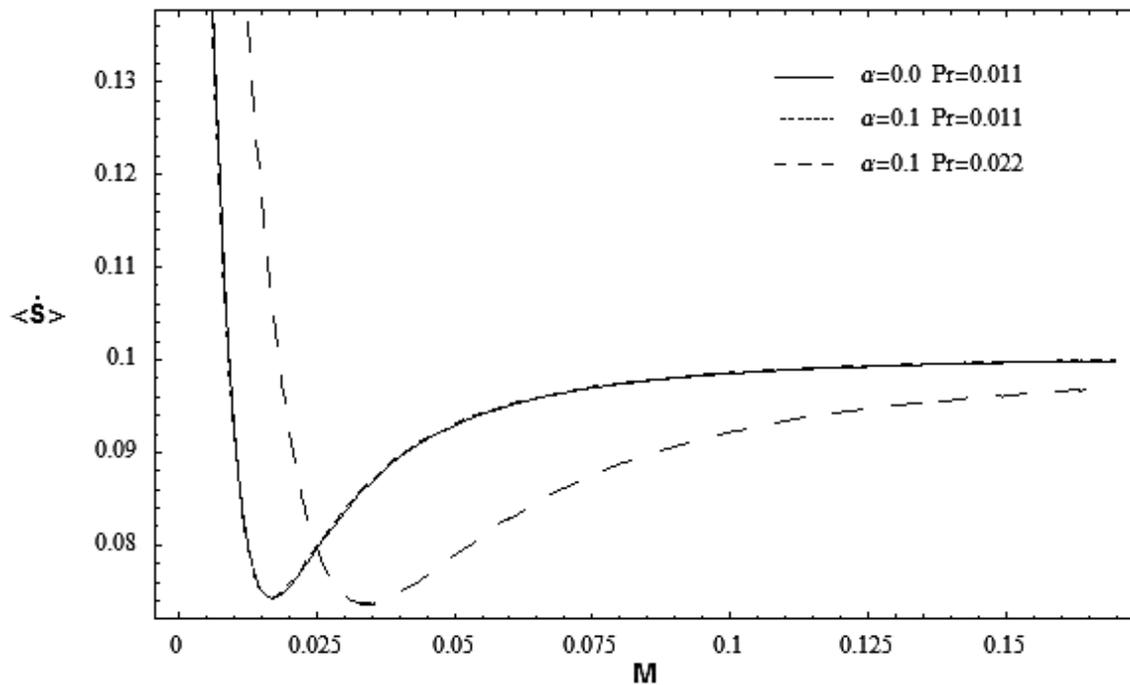


Figura 4.25. Entropía global como función de M para diferentes valores de α y Pr . $Re=2$, $P=1$, $Ec=1$, $\phi = 0.1$ $Bi_{1,2} = 1$.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS A FUTURO

En el presente estudio se analizó el efecto de cada uno de los parámetros que caracterizan al sistema sobre el campo de velocidad y temperatura. Uno de los resultados importantes de este trabajo es que se consideró intercambio de calor por convección y se obtuvo condiciones óptimas de operación donde la producción de entropía global es mínima.

- El perfil de velocidad es afectado significativamente con el aumento del tamaño de las partículas contenidas en el fluido.
- Los perfiles de velocidad son desplazados hacia la parte superior del canal cuando Reynolds aumenta, esto debido a la inyección por la placa inferior del canal y la succión a través de la placa superior.
- La presencia de campo magnético en el sistema hace que los perfiles de velocidades se aplanen debido a la fuerza de Lorentz que actúa en la misma dirección pero en sentido contrario al movimiento del fluido.
- Sobre la parte del comportamiento dinámico, el efecto principal del deslizamiento sobre los perfiles de velocidades es aumentarlo conforme se aumenta el coeficiente.
- El sistema presenta una buena conductividad térmica usando nanofluido.
- La temperatura disminuye con el deslizamiento del fluido debido al decrecimiento en la disipación viscosa.
- En el comportamiento térmico cuando la intensidad del campo magnético aumenta la temperatura en el sistema disminuye.
- La disminución de velocidad se refleja en la producción local de *entropía*, a mayores valores de deslizamiento menor pérdida de energía útil en el canal del sistema. Por lo tanto, para la construcción de un sistema es muy importante tomar en cuenta el deslizamiento en las paredes ya que también de ello dependerá la eficiencia del sistema.

Este trabajo tiene la finalidad de que en un futuro, puedan desarrollarse sistemas energéticos térmicos donde las pérdidas de energía útil sean mínimas, de tal manera que cada sistema optimizado nos pueda brindar su máxima eficiencia exergética.

Por otro lado, se pretende realizar trabajos tomando en cuenta nuevas consideraciones en el sistema para distintas modalidades, un ejemplo de estas sería el efecto de la radiación en el sistema.

REFERENCIAS

- Aithal, S. (2008). Analysis of optimum power extraction in a MHD generator with spatially varying electrical conductivity. *International Journal of Thermal Sciences*, 1107-1112.
- Aytac A, I. O. (2008). Effect of slip on entropy generation in a single rotating disk in MHD flow. *Applied Energy*, 1225-1236.
- Bejan, A. (2002). Fundamentals of exergy analysis, entropy generation minimization, and the generation of flow architecture. *International Journal of Energy Research* 26, 545-565.
- Bejan, A. (2006). *Advanced Engineering Thermodynamics*. Wiley.
- Cuevas. (1989). Procesos disipativos en fluidos conductores de electricidad. Tesina para la presentación de examen general de conocimientos (opcion B).
- Cuevas, I. G. (2010). Entropy generation minimization of a MHD (magnetohydrodynamic) flow in a microchannel. *Energy*, 4149-4155.
- Denbigh, K. G. (1956). The second-law efficiency of chemical processes. *Chemical Engineering*, Science 6, 1-9.
- García Colín L. (s.f.). *Termodinámica de Procesos Irreversibles*. Universidad Autónoma Metropolitana. Mexico: Colección CBI.
- Haro, M. (s.f.). Entropy Generation in Oscillatory Flow Between Parallel Plates. *New Trends in Statistical Physics*, 97-102.
- Hughes, W. F. (1989). *The electromagnetodynamics of Fluids*.
- Ibañez. (2012). Optimum wall thickness ratio based on the minimization of entropy generation in a viscous flow between parallel plates. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 587-592.
- Ibañez G., C. S. (2002). Optimization analysis of an alternate MHD electric generator. *Energy Conversion and Management*, 1757-1771.
- Ibañez G., C. S. (2003). Heat transfer in asymmetric convective cooling and optimized entropy generation rate. *Rev. Mex, Física*.
- Ibañez G., L. d. (2004). Thermodynamic optimization of radial MHD flow between parallel disks. *J. Non-Equilib. Thermodynamics.*, 107-122.

-
- Johannessen E., N. L. (2002). Minimizing the entropy production in heat exchange. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2649-2654.
- Kejlstrup-Ratjke, S. D.-A. (1995). Reducing lost work in chemical processes. *Chemical Engineering Science* 50, 1551-1560.
- Kjelstrup, S. B. (2006). Elements of irreversible thermodynamics for engineers. *2nd Edition*.
- Kutz, M. (2006). Exergy Analysis, Entropy Generation Minimization, and Constructal Theory. *Mechanical Engineer's Handbook*.
- Mazur, P. D. (1984). Non-Equilibrium Thermodynamics.
- Montazeri, A. S. (2007). Second law analysis of a magnetohydrodynamic plasma generator. *Energy*, 1603-1616.
- Omid Mahian, A. K. (2013). A review of entropy generation in nanofluid flow. *Elsevier*, 514-532.
- rujas, n. m. (Julio de 2012). *Nanofluidos*. Obtenido de <https://nataliamunozrujas.wordpress.com/termodinamica/>
- Sahin B., K. A. (1996). Maximum power density analysis of an irreversible Joule-Brayton engine. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1162.
- Salamon, P. H. (2001). What conditions make minimum entropy production equivalent to maximum power production? *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 26, 73-83.
- Salamon, P. N. (2002). A simple example of control to minimize entropy production. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 27, 45-55.
- Sciacovelli A, V. V. (2009). Entropy generation analysis in a monolithic-type solid oxide fuel cell (SOFC). *Energy*, 850-65.

ANEXO

$$E_1 = 1 - \phi + \frac{C_s \rho_s \phi}{C_f \rho_f}$$

$$E_2 = \frac{1}{\frac{k_p + 2k_f + 2\phi(k_p - k_f)}{k_p + 2k_f - \phi(k_p - k_f)}}$$

$$A = (1 - \phi) + \frac{\phi \rho_s}{\rho_f}$$

$$B = 1 + 3\phi$$

$$C = (1 - \phi)^{2.5}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{ACRe}{2}\right)^2 + BCM^2}$$

$$F_1 = \text{Sinh}[D] \left(1 + \alpha_1 \frac{ACRe}{2}\right) + \alpha_1 D \text{Cosh}[D]$$

$$F_2 = \text{Cosh}[D] \left(1 + \alpha_1 \frac{ACRe}{2}\right) + \alpha_1 D \text{Sinh}[D]$$

$$F_3 = \text{Sinh}[D] \left(\alpha_2 \frac{ACRe}{2} - 1\right) - \alpha_2 D \text{Cosh}[D]$$

$$F_4 = \text{Cosh}[D] \left(1 - \alpha_2 \frac{ACRe}{2}\right) + \alpha_2 D \text{Sinh}[D]$$

$$F_5 = 2 C_2 D + A C C_1 Re$$

$$F_6 = 2 C_1 D + A C C_2 Re$$

$$F_7 = \frac{1}{4 C} + \frac{M^2 B(C_1^2 + C_2^2)}{2}$$

$$F_8 = \frac{F_6^2 - F_5^2}{8 C} + \frac{1}{2} M^2 B(C_2^2 - C_1^2)$$

$$F_9 = \frac{F_5 F_6}{4 C} + M^2 B C_1 C_2$$

$$C_2 = \left(\frac{P}{B M^2} e^{\frac{A C Re}{2}} (F_3 e^{-A C Re} - F_1) \right) / (F_1 F_4 - F_2 F_3)$$

$$C_1 = \frac{1}{\frac{A C Re}{e^{\frac{A C Re}{2}} F_1}} \left(-C_2 e^{\frac{A C Re}{2}} F_2 - \frac{P}{B M^2} \right)$$

$$C_3 = \left(\frac{E c}{E_1 Re} \left(\frac{e^{A C Re y} F_8}{A C Re} + \frac{P^2 y}{B M^2} + \frac{e^{A C Re y} F_9 (-2 D \cosh[2 D y] + A C Re \sinh[2 D y])}{-4 D^2 + A^2 C^2 Re^2} + \frac{e^{A C Re y} F_7 (A C Re \cosh[2 D y] - 2 D \sinh[2 D y])}{-4 D^2 + A^2 C^2 Re^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4 C_1 e^{\frac{1}{2} A C Re y} P (-2 D \cosh[D y] + A C Re \sinh[D y])}{-4 D^2 + A^2 C^2 Re^2} + \frac{4 C_2 e^{\frac{1}{2} A C Re y} P (A C Re \cosh[D y] - 2 D \sinh[D y])}{-4 D^2 + A^2 C^2 Re^2} \right) \right) + J$$

$$C_4 = \left(\left(-\frac{1}{E_1 Re} E c \left(\frac{e^{-(E_1 E_2 Pe - A C Re) y} F_8}{-E_1 E_2 Pe + A C Re} - \frac{e^{-E_1 E_2 Pe y} P^2}{B E_1 E_2 Pe M^2} + \frac{e^{-E_1 E_2 Pe y + A C Re y} F_9 (-2 D \cosh[2 D y] + (-E_1 E_2 Pe + A C Re) \sinh[2 D y])}{(-2 D + E_1 E_2 Pe - A C Re)(2 D + E_1 E_2 Pe - A C Re)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{-E_1 E_2 Pe y + A C Re y} F_7 ((-E_1 E_2 Pe + A C Re) \cosh[2 D y] - 2 D \sinh[2 D y])}{(-2 D + E_1 E_2 Pe - A C Re)(2 D + E_1 E_2 Pe - A C Re)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4 C_1 e^{-E_1 E_2 Pe y + \frac{1}{2} A C Re y} P (2 D \cosh[D y] + (2 E_1 E_2 Pe - A C Re) \sinh[D y])}{(2 D + 2 E_1 E_2 Pe - A C Re)(2 D - 2 E_1 E_2 Pe + A C Re)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4 C_2 e^{-E_1 E_2 Pe y + \frac{1}{2} A C Re y} P ((2 E_1 E_2 Pe - A C Re) \cosh[D y] + 2 D \sinh[D y])}{(2 D + 2 E_1 E_2 Pe - A C Re)(2 D - 2 E_1 E_2 Pe + A C Re)} \right) \right) e^{E_1 E_2 Pe y} + I$$

$$\theta = C_3 + C_4 e^{E_1 E_2 P e y}$$

$$u = e^{\frac{ACRe}{2} y} (C_1 \sinh[Dy] + C_2 \cosh[Dy]) + \frac{P}{BM^2}$$

$$Z_1$$

$$= \frac{1}{re} \left(\frac{Ec P^2}{BE_1 M^2} + E_2 Pe (e^{E_1 E_2 P e y} E_1 ire + \frac{e^{ACRe y} Ec F_8}{E_1 E_2 Pe - ACRe}) \right)$$

$$- (4e^{\frac{1}{2} ACRe y} E_2 Ec P Pe ((2C_1 D + 2C_2 E_1 E_2 Pe - ACC_2 Re) \cosh[Dy] + (2C_2 D + 2C_1 E_1 E_2 Pe - ACC_1 Re) \sinh[Dy])) / ((2D + 2E_1 E_2 Pe - ACRe)(2D - 2E_1 E_2 Pe + ACRe))$$

$$+ (e^{ACRe y} E_2 Ec Pe ((2D F_9 + E_1 E_2 F_7 Pe - ACF_7 Re) \cosh[2Dy] + (2DF_7 + E_1 E_2 F_9 Pe - AC F_9 Re) \sinh[2Dy])) / ((-2D + E_1 E_2 Pe - ACRe)(2D + E_1 E_2 Pe - ACRe))$$

$$Z_2 = F_7 e^{ACRe y} \cosh[2dy] + e^{ACRe y} F_8 + F_9 e^{ACRe y} \sinh[2dy] + 2PC_1 e^{\frac{ACRe y}{2}} \sinh[dy] + 2PC_2 e^{\frac{ACRe y}{2}} \cosh[dy] + \frac{P^2}{BM^2}$$

$$\dot{S} = \frac{1}{E_2} \frac{1}{\theta^2} Z_1^2 + \frac{Ec Pr}{\theta} (Z_2)$$

i =

$$- \left(bi_2 E_2 \right.$$

$$\left(bi_1 E_2 - 1 / (E_1 re) bi_1 E_2 Ec \left(-\frac{P^2}{BM^2} + \frac{e^{-Acra} F_8}{Acre} + \frac{4 C_2 e^{-\frac{1}{2} Acra} P (Acre \cosh[d] + 2 d \sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{4 C_1 e^{-\frac{1}{2} Acra} P (-2 d \cosh[d] - Acre \sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{e^{-Acra} F_7 (Acre \cosh[2d] + 2 d \sinh[2d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{e^{-Acra} F_9 (-2 d \cosh[2d] - Acre \sinh[2d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} \right) +$$

$$1 / (E_1 re) Ec \left(e^{-Acra} F_8 + \frac{P^2}{BM^2} + \frac{2 A c C_2 e^{-\frac{1}{2} Acra} P re (Acre \cosh[d] + 2 d \sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{4 C_1 e^{-\frac{1}{2} Acra} P (Acre \cosh[d] + 2 d^2 \sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} +$$

$$\frac{2 A c C_1 e^{-\frac{1}{2} Acra} P re (-2 d \cosh[d] - Acre \sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{4 C_2 e^{-\frac{1}{2} Acra} P (-2 d^2 \cosh[d] - Acre \sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} +$$

$$\frac{A c e^{-Acra} F_7 re (Acre \cosh[2d] + 2 d \sinh[2d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{e^{-Acra} F_9 (2 A c d re \cosh[2d] + 4 d^2 \sinh[2d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} +$$

$$\frac{A c e^{-Acra} F_9 re (-2 d \cosh[2d] - Acre \sinh[2d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{e^{-Acra} F_7 (-4 d^2 \cosh[2d] - 2 A c d re \sinh[2d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} \right) +$$

$$1 / (E_1 re) bi_1 e^{-E_1 E_2 Pa} E_2 Ec \left(-\frac{e^{E_1 E_2 Pa} P^2}{BE_1 E_2 M^2 Pa} + \frac{e^{E_1 E_2 Pa - Acra} F_8}{-E_1 E_2 Pa + Acre} + \frac{4 C_2 e^{\frac{E_1 E_2 Pa - Acra}{2}} P ((2 E_1 E_2 Pa - Acre) \cosh[d] - 2 d \sinh[d])}{(2 d + 2 E_1 E_2 Pa - Acre) (2 d - 2 E_1 E_2 Pa + Acre)} +$$

$$\frac{4 C_1 e^{\frac{E_1 E_2 Pa - Acra}{2}} P (2 d \cosh[d] - (2 E_1 E_2 Pa - Acre) \sinh[d])}{(2 d + 2 E_1 E_2 Pa - Acre) (2 d - 2 E_1 E_2 Pa + Acre)} + \frac{e^{E_1 E_2 Pa - Acra} F_7 ((-E_1 E_2 Pa + Acre) \cosh[2d] + 2 d \sinh[2d])}{(-2 d + E_1 E_2 Pa - Acre) (2 d + E_1 E_2 Pa - Acre)} +$$

$$\frac{e^{E_1 E_2 Pa - Acra} F_9 (-2 d \cosh[2d] - (-E_1 E_2 Pa + Acre) \sinh[2d])}{(-2 d + E_1 E_2 Pa - Acre) (2 d + E_1 E_2 Pa - Acre)} \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & 1 / r e^{-E_1 E_2 P a} E_2 E c P e \left[-\frac{e^{E_1 E_2 P a} p^2}{B E_1 E_2 M^2 P e} + \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c r a} F_8}{-E_1 E_2 P e + A c r e} + \frac{4 C_2 e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c r a}{2}} P \left((2 E_1 E_2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] - 2 d \text{Sinh}[d] \right)}{(2 d + 2 E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d - 2 E_1 E_2 P e + A c r e)} + \right. \\
 & \frac{4 C_1 e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c r a}{2}} P \left(2 d \text{Cosh}[d] - (2 E_1 E_2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d] \right)}{(2 d + 2 E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d - 2 E_1 E_2 P e + A c r e)} + \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c r a} F_7 \left((-E_1 E_2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] + 2 d \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d + E_1 E_2 P e - A c r e)} + \\
 & \left. \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c r a} F_9 \left(-2 d \text{Cosh}[2 d] - (-E_1 E_2 P e + A c r e) \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d + E_1 E_2 P e - A c r e)} \right] - \\
 & 1 / (E_1 r e) e^{-E_1 E_2 P a} E c \left(e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c r a}{2}} F_8 + \frac{e^{E_1 E_2 P a} p^2}{B M^2} + \left(4 C_2 e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c r a}{2}} P \left(-E_1 E_2 P e + \frac{A c r e}{2} \right) \left((2 E_1 E_2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] - 2 d \text{Sinh}[d] \right) \right) / \right. \\
 & \left. \left((2 d + 2 E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d - 2 E_1 E_2 P e + A c r e) \right) + \frac{4 C_1 e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c r a}{2}} P \left(d \left(2 E_1 E_2 P e - A c r e \right) \text{Cosh}[d] - 2 d^2 \text{Sinh}[d] \right)}{(2 d + 2 E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d - 2 E_1 E_2 P e + A c r e)} + \right. \\
 & \left. \left(4 C_1 e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c r a}{2}} P \left(-E_1 E_2 P e + \frac{A c r e}{2} \right) \left(2 d \text{Cosh}[d] - (2 E_1 E_2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d] \right) \right) / \left((2 d + 2 E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d - 2 E_1 E_2 P e + A c r e) \right) + \right. \\
 & \frac{4 C_2 e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c r a}{2}} P \left(2 d^2 \text{Cosh}[d] - d \left(2 E_1 E_2 P e - A c r e \right) \text{Sinh}[d] \right)}{(2 d + 2 E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d - 2 E_1 E_2 P e + A c r e)} + \\
 & \left. \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c r a} F_7 \left(-E_1 E_2 P e + A c r e \right) \left((-E_1 E_2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] + 2 d \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d + E_1 E_2 P e - A c r e)} + \right. \\
 & \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c r a} F_9 \left(2 d \left(-E_1 E_2 P e + A c r e \right) \text{Cosh}[2 d] + 4 d^2 \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d + E_1 E_2 P e - A c r e)} + \\
 & \left. \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c r a} F_9 \left(-E_1 E_2 P e + A c r e \right) \left(-2 d \text{Cosh}[2 d] - (-E_1 E_2 P e + A c r e) \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d + E_1 E_2 P e - A c r e)} + \right. \\
 & \left. \left. \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c r a} F_7 \left(-4 d^2 \text{Cosh}[2 d] - 2 d \left(-E_1 E_2 P e + A c r e \right) \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d + E_1 E_2 P e - A c r e)} \right) \right) +
 \end{aligned}$$

bi1 E2

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{(E1 \text{ re}) \text{ bi2 E2 Ec}} \left(\frac{p^2}{B M^2} + \frac{e^{A c r e} F8}{A c r e} + \frac{4 C2 e^{\frac{A c r e}{2}} P (A c r e \text{ Cosh}[d] - 2 d \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C1 e^{\frac{A c r e}{2}} P (-2 d \text{ Cosh}[d] + A c r e \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{e^{A c r e} F7 (A c r e \text{ Cosh}[2 d] - 2 d \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{A c r e} F9 (-2 d \text{ Cosh}[2 d] + A c r e \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} \right) \right) + \\
 & \frac{1}{(E1 \text{ re}) \text{ Ec}} \left(e^{A c r e} F8 + \frac{p^2}{B M^2} + \frac{2 A c C2 e^{\frac{A c r e}{2}} P r e (A c r e \text{ Cosh}[d] - 2 d \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C1 e^{\frac{A c r e}{2}} P (A c d r e \text{ Cosh}[d] - 2 d^2 \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} \right) + \\
 & \frac{2 A c C1 e^{\frac{A c r e}{2}} P r e (-2 d \text{ Cosh}[d] + A c r e \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C2 e^{\frac{A c r e}{2}} P (-2 d^2 \text{ Cosh}[d] + A c d r e \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \\
 & \frac{A c e^{A c r e} F7 r e (A c r e \text{ Cosh}[2 d] - 2 d \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{A c r e} F9 (2 A c d r e \text{ Cosh}[2 d] - 4 d^2 \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \\
 & \left. \frac{A c e^{A c r e} F9 r e (-2 d \text{ Cosh}[2 d] + A c r e \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{A c r e} F7 (-4 d^2 \text{ Cosh}[2 d] + 2 A c d r e \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} \right) - \\
 & \frac{1}{(E1 \text{ re}) \text{ bi2 } e^{E1 E2 P e} E2 \text{ Ec}} \left(- \frac{e^{-E1 E2 P e} p^2}{B E1 E2 M^2 P e} + \frac{e^{-E1 E2 P e + A c r e} F8}{-E1 E2 P e + A c r e} + \frac{4 C2 e^{-\frac{E1 E2 P e + A c r e}{2}} P ((2 E1 E2 P e - A c r e) \text{ Cosh}[d] + 2 d \text{ Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} \right) + \\
 & \frac{4 C1 e^{-\frac{E1 E2 P e + A c r e}{2}} P (2 d \text{ Cosh}[d] + (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{ Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \frac{e^{-E1 E2 P e + A c r e} F7 ((-E1 E2 P e + A c r e) \text{ Cosh}[2 d] - 2 d \text{ Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} + \\
 & \left. \frac{e^{-E1 E2 P e + A c r e} F9 (-2 d \text{ Cosh}[2 d] + (-E1 E2 P e + A c r e) \text{ Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 1 / r e^{E1 E2 Pa} E2 Ec Pa \left(- \frac{e^{-E1 E2 Pa} p^2}{B E1 E2 M^2 Pa} + \frac{e^{-E1 E2 Pa + A c re} F8}{-E1 E2 Pa + A c re} + \frac{4 C2 e^{-E1 E2 Pa \cdot \frac{A c re}{2}} P \left((2 E1 E2 Pa - A c re) \text{Cosh}[d] + 2 d \text{Sinh}[d] \right)}{(2 d + 2 E1 E2 Pa - A c re) (2 d - 2 E1 E2 Pa + A c re)} + \right. \\
 & \frac{4 C1 e^{-E1 E2 Pa \cdot \frac{A c re}{2}} P \left(2 d \text{Cosh}[d] + (2 E1 E2 Pa - A c re) \text{Sinh}[d] \right)}{(2 d + 2 E1 E2 Pa - A c re) (2 d - 2 E1 E2 Pa + A c re)} + \frac{e^{-E1 E2 Pa + A c re} F7 \left((-E1 E2 Pa + A c re) \text{Cosh}[2 d] - 2 d \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E1 E2 Pa - A c re) (2 d + E1 E2 Pa - A c re)} + \\
 & \left. \frac{e^{-E1 E2 Pa + A c re} F9 \left(-2 d \text{Cosh}[2 d] + (-E1 E2 Pa + A c re) \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E1 E2 Pa - A c re) (2 d + E1 E2 Pa - A c re)} \right) - \\
 & 1 / (E1 re) e^{E1 E2 Pa} Ec \left(e^{-E1 E2 Pa + A c re} F8 + \frac{e^{-E1 E2 Pa} p^2}{B M^2} + \left(4 C2 e^{-E1 E2 Pa \cdot \frac{A c re}{2}} P \left(-E1 E2 Pa + \frac{A c re}{2} \right) \left((2 E1 E2 Pa - A c re) \text{Cosh}[d] + 2 d \text{Sinh}[d] \right) \right) / \right. \\
 & \left. \left((2 d + 2 E1 E2 Pa - A c re) (2 d - 2 E1 E2 Pa + A c re) \right) + \frac{4 C1 e^{-E1 E2 Pa \cdot \frac{A c re}{2}} P \left(d (2 E1 E2 Pa - A c re) \text{Cosh}[d] + 2 d^2 \text{Sinh}[d] \right)}{(2 d + 2 E1 E2 Pa - A c re) (2 d - 2 E1 E2 Pa + A c re)} + \right. \\
 & \left. \left(4 C1 e^{-E1 E2 Pa \cdot \frac{A c re}{2}} P \left(-E1 E2 Pa + \frac{A c re}{2} \right) \left(2 d \text{Cosh}[d] + (2 E1 E2 Pa - A c re) \text{Sinh}[d] \right) \right) / \left((2 d + 2 E1 E2 Pa - A c re) (2 d - 2 E1 E2 Pa + A c re) \right) + \right. \\
 & \frac{4 C2 e^{-E1 E2 Pa \cdot \frac{A c re}{2}} P \left(2 d^2 \text{Cosh}[d] + d (2 E1 E2 Pa - A c re) \text{Sinh}[d] \right)}{(2 d + 2 E1 E2 Pa - A c re) (2 d - 2 E1 E2 Pa + A c re)} + \\
 & \left. \frac{e^{-E1 E2 Pa + A c re} F7 \left((-E1 E2 Pa + A c re) \left((-E1 E2 Pa + A c re) \text{Cosh}[2 d] - 2 d \text{Sinh}[2 d] \right) \right)}{((-2 d + E1 E2 Pa - A c re) (2 d + E1 E2 Pa - A c re))} + \right. \\
 & \frac{e^{-E1 E2 Pa + A c re} F9 \left(2 d \left(-E1 E2 Pa + A c re \right) \text{Cosh}[2 d] - 4 d^2 \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E1 E2 Pa - A c re) (2 d + E1 E2 Pa - A c re)} + \\
 & \left. \frac{e^{-E1 E2 Pa + A c re} F9 \left(-E1 E2 Pa + A c re \right) \left(-2 d \text{Cosh}[2 d] + (-E1 E2 Pa + A c re) \text{Sinh}[2 d] \right)}{((-2 d + E1 E2 Pa - A c re) (2 d + E1 E2 Pa - A c re))} + \right. \\
 & \left. \left. \frac{e^{-E1 E2 Pa + A c re} F7 \left(-4 d^2 \text{Cosh}[2 d] + 2 d \left(-E1 E2 Pa + A c re \right) \text{Sinh}[2 d] \right)}{(-2 d + E1 E2 Pa - A c re) (2 d + E1 E2 Pa - A c re)} \right) \right) / \\
 & (bi2 E2 (-bi1 e^{-E1 E2 Pa} E2 + e^{-E1 E2 Pa} E1 E2 Pa) + bi1 E2 (bi2 e^{E1 E2 Pa} E2 + e^{E1 E2 Pa} E1 E2 Pa))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J = & -\frac{1}{bi2 E2} \\
 & \left(\frac{1}{(E1 re) bi2 E2 Ec} \left(\frac{p^2}{BM^2} + \frac{e^{Acra} F8}{Ac re} + \frac{4 C2 e^{\frac{Acra}{2}} P (Ac re Cosh[d] - 2 d Sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{4 C1 e^{\frac{Acra}{2}} P (-2 d Cosh[d] + Ac re Sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{e^{Acra} F7 (Ac re Cosh[2 d] - 2 d Sinh[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{e^{Acra} F9 (-2 d Cosh[2 d] + Ac re Sinh[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} \right) + \right. \\
 & \frac{1}{(E1 re) Ec} \left(e^{Acra} F8 + \frac{p^2}{BM^2} + \frac{2 A c C2 e^{\frac{Acra}{2}} P re (Ac re Cosh[d] - 2 d Sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{4 C1 e^{\frac{Acra}{2}} P (Ac d re Cosh[d] - 2 d^2 Sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \right. \\
 & \frac{2 A c C1 e^{\frac{Acra}{2}} P re (-2 d Cosh[d] + Ac re Sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{4 C2 e^{\frac{Acra}{2}} P (-2 d^2 Cosh[d] + Ac d re Sinh[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \\
 & \frac{A c e^{Acra} F7 re (Ac re Cosh[2 d] - 2 d Sinh[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{e^{Acra} F9 (2 A c d re Cosh[2 d] - 4 d^2 Sinh[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \\
 & \left. \left. \frac{A c e^{Acra} F9 re (-2 d Cosh[2 d] + Ac re Sinh[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} + \frac{e^{Acra} F7 (-4 d^2 Cosh[2 d] + 2 A c d re Sinh[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 re^2} \right) - \right. \\
 & \frac{1}{(E1 re) bi2 e^{E1 E2 Pa} E2 Ec} \left(-\frac{e^{-E1 E2 Pa} p^2}{B E1 E2 M^2 Pa} + \frac{e^{-E1 E2 Pa + Acra} F8}{-E1 E2 Pa + Ac re} + \frac{4 C2 e^{-E1 E2 Pa \cdot \frac{Acra}{2}} P ((2 E1 E2 Pa - Ac re) Cosh[d] + 2 d Sinh[d])}{(2 d + 2 E1 E2 Pa - Ac re) (2 d - 2 E1 E2 Pa + Ac re)} + \right. \\
 & \frac{4 C1 e^{-E1 E2 Pa \cdot \frac{Acra}{2}} P (2 d Cosh[d] + (2 E1 E2 Pa - Ac re) Sinh[d])}{(2 d + 2 E1 E2 Pa - Ac re) (2 d - 2 E1 E2 Pa + Ac re)} + \frac{e^{-E1 E2 Pa \cdot Acra} F7 ((-E1 E2 Pa + Ac re) Cosh[2 d] - 2 d Sinh[2 d])}{(-2 d + E1 E2 Pa - Ac re) (2 d + E1 E2 Pa - Ac re)} + \\
 & \left. \left. \frac{e^{-E1 E2 Pa \cdot Acra} F9 (-2 d Cosh[2 d] + (-E1 E2 Pa + Ac re) Sinh[2 d])}{(-2 d + E1 E2 Pa - Ac re) (2 d + E1 E2 Pa - Ac re)} \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$1 / r e e^{E1 E2 P e} E2 E c P e \left(- \frac{e^{-E1 E2 P e} p^2}{B E1 E2 M^2 P e} + \frac{e^{-E1 E2 P e + A c r e} F8}{-E1 E2 P e + A c r e} + \frac{4 C2 e^{-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2}} P ((2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] + 2 d \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \right. \\ \left. \frac{4 C1 e^{-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2}} P (2 d \text{Cosh}[d] + (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \frac{e^{-E1 E2 P e + A c r e} F7 ((-E1 E2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] - 2 d \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} + \right. \\ \left. \frac{e^{-E1 E2 P e + A c r e} F9 (-2 d \text{Cosh}[2 d] + (-E1 E2 P e + A c r e) \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} \right) -$$

$$1 / (E1 r e) e^{E1 E2 P e} E c$$

$$\left(e^{-E1 E2 P e + A c r e} F8 + \frac{e^{-E1 E2 P e} p^2}{B M^2} + \left(4 C2 e^{-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2}} P \left(-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2} \right) ((2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] + 2 d \text{Sinh}[d]) \right) / \right. \\ \left. ((2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)) + \frac{4 C1 e^{-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2}} P (d (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] + 2 d^2 \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \right. \\ \left. \left(4 C1 e^{-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2}} P \left(-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2} \right) (2 d \text{Cosh}[d] + (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d]) \right) / ((2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)) + \right. \\ \left. \frac{4 C2 e^{-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2}} P (2 d^2 \text{Cosh}[d] + d (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \right. \\ \left. \frac{(e^{-E1 E2 P e + A c r e} F7 (-E1 E2 P e + A c r e) ((-E1 E2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] - 2 d \text{Sinh}[2 d]))}{((-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e))} + \right. \\ \left. \frac{e^{-E1 E2 P e + A c r e} F9 (2 d (-E1 E2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] - 4 d^2 \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} + \right. \\ \left. \frac{(e^{-E1 E2 P e + A c r e} F9 (-E1 E2 P e + A c r e) (-2 d \text{Cosh}[2 d] + (-E1 E2 P e + A c r e) \text{Sinh}[2 d]))}{((-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e))} + \right. \\ \left. \frac{e^{-E1 E2 P e + A c r e} F7 (-4 d^2 \text{Cosh}[2 d] + 2 d (-E1 E2 P e + A c r e) \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} \right) \Bigg) +$$

$$\left(b_{i2} e^{E_1 E_2 P a} E_2 + e^{E_1 E_2 P a} E_1 E_2 P e \right)$$

$$\left(b_{i2} E_2 \right)$$

$$\left(b_{i1} E_2 - 1 / (E_1 r e) b_{i1} E_2 E c \left(-\frac{p^2}{B M^2} + \frac{e^{-A c x a} F_8}{A c r e} + \frac{4 C_2 e^{-\frac{1}{2} A c x a} P (A c r e \text{Cosh}[d] + 2 d \text{Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C_1 e^{-\frac{1}{2} A c x a} P (-2 d \text{Cosh}[d] - A c r e \text{Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{-A c x a} F_7 (A c r e \text{Cosh}[2 d] + 2 d \text{Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{-A c x a} F_9 (-2 d \text{Cosh}[2 d] - A c r e \text{Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} \right) + \right.$$

$$1 / (E_1 r e) E c \left(e^{-A c x a} F_8 + \frac{p^2}{B M^2} + \frac{2 A c C_2 e^{-\frac{1}{2} A c x a} P r e (A c r e \text{Cosh}[d] + 2 d \text{Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C_1 e^{-\frac{1}{2} A c x a} P (A c d r e \text{Cosh}[d] + 2 d^2 \text{Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{2 A c C_1 e^{-\frac{1}{2} A c x a} P r e (-2 d \text{Cosh}[d] - A c r e \text{Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C_2 e^{-\frac{1}{2} A c x a} P (-2 d^2 \text{Cosh}[d] - A c d r e \text{Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{A c e^{-A c x a} F_7 r e (A c r e \text{Cosh}[2 d] + 2 d \text{Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{-A c x a} F_9 (2 A c d r e \text{Cosh}[2 d] + 4 d^2 \text{Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{A c e^{-A c x a} F_9 r e (-2 d \text{Cosh}[2 d] - A c r e \text{Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{-A c x a} F_7 (-4 d^2 \text{Cosh}[2 d] - 2 A c d r e \text{Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} \right) +$$

$$1 / (E_1 r e) b_{i1} e^{-E_1 E_2 P a} E_2 E c \left(-\frac{e^{E_1 E_2 P a} p^2}{B E_1 E_2 M^2 P e} + \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c x a} F_8}{-E_1 E_2 P e + A c r e} + \frac{4 C_2 e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c x a}{2}} P ((2 E_1 E_2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] - 2 d \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d - 2 E_1 E_2 P e + A c r e)} + \frac{4 C_1 e^{\frac{E_1 E_2 P a - A c x a}{2}} P (2 d \text{Cosh}[d] - (2 E_1 E_2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d - 2 E_1 E_2 P e + A c r e)} + \frac{e^{E_1 E_2 P a - A c x a} F_7 ((-E_1 E_2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] + 2 d \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E_1 E_2 P e - A c r e) (2 d + E_1 E_2 P e - A c r e)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{e^{E1 E2 Pa - A c r e} F9 (-2 d \text{Cosh}[2 d] - (-E1 E2 Pe + A c r e) \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 Pe - A c r e) (2 d + E1 E2 Pe - A c r e)} \right\} - \\
 1 / r e e^{-E1 E2 Pa} E2 Ec Pe & \left(- \frac{e^{E1 E2 Pa} p^2}{B E1 E2 M^2 Pe} + \frac{e^{E1 E2 Pa - A c r e} F8}{-E1 E2 Pe + A c r e} + \frac{4 C2 e^{\frac{E1 E2 Pa - A c r e}{2}} P ((2 E1 E2 Pe - A c r e) \text{Cosh}[d] - 2 d \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 Pe - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 Pe + A c r e)} + \right. \\
 & \frac{4 C1 e^{\frac{E1 E2 Pa - A c r e}{2}} P (2 d \text{Cosh}[d] - (2 E1 E2 Pe - A c r e) \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 Pe - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 Pe + A c r e)} + \frac{e^{E1 E2 Pa - A c r e} F7 ((-E1 E2 Pe + A c r e) \text{Cosh}[2 d] + 2 d \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 Pe - A c r e) (2 d + E1 E2 Pe - A c r e)} + \\
 & \left. \frac{e^{E1 E2 Pa - A c r e} F9 (-2 d \text{Cosh}[2 d] - (-E1 E2 Pe + A c r e) \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 Pe - A c r e) (2 d + E1 E2 Pe - A c r e)} \right\} - \\
 1 / (E1 re) e^{-E1 E2 Pa} Ec & \left(e^{\frac{E1 E2 Pa - A c r e}{2}} F8 + \frac{e^{E1 E2 Pa} p^2}{B M^2} + \left(4 C2 e^{\frac{E1 E2 Pa - A c r e}{2}} P \left(-E1 E2 Pe + \frac{A c r e}{2} \right) ((2 E1 E2 Pe - A c r e) \text{Cosh}[d] - 2 d \text{Sinh}[d]) \right) / \right. \\
 & ((2 d + 2 E1 E2 Pe - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 Pe + A c r e)) + \frac{4 C1 e^{\frac{E1 E2 Pa - A c r e}{2}} P (d (2 E1 E2 Pe - A c r e) \text{Cosh}[d] - 2 d^2 \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 Pe - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 Pe + A c r e)} + \\
 & \left(4 C1 e^{\frac{E1 E2 Pa - A c r e}{2}} P \left(-E1 E2 Pe + \frac{A c r e}{2} \right) (2 d \text{Cosh}[d] - (2 E1 E2 Pe - A c r e) \text{Sinh}[d]) \right) / ((2 d + 2 E1 E2 Pe - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 Pe + A c r e)) + \\
 & \frac{4 C2 e^{\frac{E1 E2 Pa - A c r e}{2}} P (2 d^2 \text{Cosh}[d] - d (2 E1 E2 Pe - A c r e) \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 Pe - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 Pe + A c r e)} + \\
 & \left(e^{E1 E2 Pa - A c r e} F7 (-E1 E2 Pe + A c r e) ((-E1 E2 Pe + A c r e) \text{Cosh}[2 d] + 2 d \text{Sinh}[2 d]) \right) / ((-2 d + E1 E2 Pe - A c r e) (2 d + E1 E2 Pe - A c r e)) + \\
 & \frac{e^{E1 E2 Pa - A c r e} F9 (2 d (-E1 E2 Pe + A c r e) \text{Cosh}[2 d] + 4 d^2 \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 Pe - A c r e) (2 d + E1 E2 Pe - A c r e)} + \\
 & \left(e^{E1 E2 Pa - A c r e} F9 (-E1 E2 Pe + A c r e) (-2 d \text{Cosh}[2 d] - (-E1 E2 Pe + A c r e) \text{Sinh}[2 d]) \right) / ((-2 d + E1 E2 Pe - A c r e) (2 d + E1 E2 Pe - A c r e)) + \\
 & \left. \frac{e^{E1 E2 Pa - A c r e} F7 (-4 d^2 \text{Cosh}[2 d] - 2 d (-E1 E2 Pe + A c r e) \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 Pe - A c r e) (2 d + E1 E2 Pe - A c r e)} \right) \Bigg) +
 \end{aligned}$$

bi1 E2

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{(E1 \text{ re}) \text{ bi2 E2 Ec}} \left(\frac{p^2}{B M^2} + \frac{e^{A c r a} F8}{A c r e} + \frac{4 C2 e^{\frac{A c r a}{2}} P (A c r e \text{ Cosh}[d] - 2 d \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C1 e^{\frac{A c r a}{2}} P (-2 d \text{ Cosh}[d] + A c r e \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{e^{A c r a} F7 (A c r e \text{ Cosh}[2 d] - 2 d \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{A c r a} F9 (-2 d \text{ Cosh}[2 d] + A c r e \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{(E1 \text{ re}) \text{ Ec}} \left(e^{A c r a} F8 + \frac{p^2}{B M^2} + \frac{2 A c C2 e^{\frac{A c r a}{2}} P r e (A c r e \text{ Cosh}[d] - 2 d \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C1 e^{\frac{A c r a}{2}} P (A c d r e \text{ Cosh}[d] - 2 d^2 \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{2 A c C1 e^{\frac{A c r a}{2}} P r e (-2 d \text{ Cosh}[d] + A c r e \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{4 C2 e^{\frac{A c r a}{2}} P (-2 d^2 \text{ Cosh}[d] + A c d r e \text{ Sinh}[d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{A c e^{A c r a} F7 r e (A c r e \text{ Cosh}[2 d] - 2 d \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{A c r a} F9 (2 A c d r e \text{ Cosh}[2 d] - 4 d^2 \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{A c e^{A c r a} F9 r e (-2 d \text{ Cosh}[2 d] + A c r e \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} + \frac{e^{A c r a} F7 (-4 d^2 \text{ Cosh}[2 d] + 2 A c d r e \text{ Sinh}[2 d])}{-4 d^2 + A^2 c^2 r e^2} \right) - \right. \\
 & \left. \frac{1}{(E1 \text{ re}) \text{ bi2 } e^{E1 E2 P a} E2 \text{ Ec}} \left(-\frac{e^{-E1 E2 P a} p^2}{B E1 E2 M^2 P e} + \frac{e^{-E1 E2 P a} A c r a F8}{-E1 E2 P e + A c r e} + \frac{4 C2 e^{-E1 E2 P a} \frac{A c r a}{2} P ((2 E1 E2 P e - A c r e) \text{ Cosh}[d] + 2 d \text{ Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{4 C1 e^{-E1 E2 P a} \frac{A c r a}{2} P (2 d \text{ Cosh}[d] + (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{ Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \frac{e^{-E1 E2 P a} A c r a F7 ((-E1 E2 P e + A c r e) \text{ Cosh}[2 d] - 2 d \text{ Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{e^{-E1 E2 P a} A c r a F9 (-2 d \text{ Cosh}[2 d] + (-E1 E2 P e + A c r e) \text{ Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 1 / r e^{E1 E2 P e} E2 E c P e \left(-\frac{e^{-E1 E2 P e} p^2}{B E1 E2 M^2 P e} + \frac{e^{-E1 E2 P e} A c r e F8}{-E1 E2 P e + A c r e} + \frac{4 C2 e^{-E1 E2 P e} \frac{A c r e}{2} P ((2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] + 2 d \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \right. \\
 & \frac{4 C1 e^{-E1 E2 P e} \frac{A c r e}{2} P (2 d \text{Cosh}[d] + (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \frac{e^{-E1 E2 P e} A c r e F7 ((-E1 E2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] - 2 d \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} + \\
 & \left. \frac{e^{-E1 E2 P e} A c r e F9 (-2 d \text{Cosh}[2 d] + (-E1 E2 P e + A c r e) \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} \right) - \\
 & 1 / (E1 r e) e^{E1 E2 P e} E c \left(e^{-E1 E2 P e} A c r e F8 + \frac{e^{-E1 E2 P e} p^2}{B M^2} + \left(4 C2 e^{-E1 E2 P e} \frac{A c r e}{2} P \left(-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2} \right) ((2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] + 2 d \text{Sinh}[d]) \right) \right) / \\
 & ((2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)) + \frac{4 C1 e^{-E1 E2 P e} \frac{A c r e}{2} P (d (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Cosh}[d] + 2 d^2 \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \\
 & \left(4 C1 e^{-E1 E2 P e} \frac{A c r e}{2} P \left(-E1 E2 P e + \frac{A c r e}{2} \right) (2 d \text{Cosh}[d] + (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d]) \right) / ((2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)) + \\
 & \frac{4 C2 e^{-E1 E2 P e} \frac{A c r e}{2} P (2 d^2 \text{Cosh}[d] + d (2 E1 E2 P e - A c r e) \text{Sinh}[d])}{(2 d + 2 E1 E2 P e - A c r e) (2 d - 2 E1 E2 P e + A c r e)} + \\
 & \frac{(e^{-E1 E2 P e} A c r e F7 (-E1 E2 P e + A c r e) ((-E1 E2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] - 2 d \text{Sinh}[2 d]))}{((-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e))} + \\
 & \frac{e^{-E1 E2 P e} A c r e F9 (2 d (-E1 E2 P e + A c r e) \text{Cosh}[2 d] - 4 d^2 \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} + \\
 & \frac{(e^{-E1 E2 P e} A c r e F9 (-E1 E2 P e + A c r e) (-2 d \text{Cosh}[2 d] + (-E1 E2 P e + A c r e) \text{Sinh}[2 d]))}{((-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e))} + \\
 & \frac{e^{-E1 E2 P e} A c r e F7 (-4 d^2 \text{Cosh}[2 d] + 2 d (-E1 E2 P e + A c r e) \text{Sinh}[2 d])}{(-2 d + E1 E2 P e - A c r e) (2 d + E1 E2 P e - A c r e)} \Bigg) / \\
 & (b i 2 E2 (b i 2 E2 (-b i 1 e^{-E1 E2 P e} E2 + e^{-E1 E2 P e} E1 E2 P e) + b i 1 E2 (b i 2 e^{E1 E2 P e} E2 + e^{E1 E2 P e} E1 E2 P e)))
 \end{aligned}$$



UNIVERSIDAD DE CIENCIAS Y ARTES DE CHIAPAS

SECRETARÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO



Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
07 de abril de 2016
Oficio No. DIP-386/16

C. Ignacio Zenteno Mazariegos
Candidato al Grado de Maestro
en Ciencias en Materiales y
Sistemas Energéticos Renovables
Presente.

En virtud de que se me ha hecho llegar por escrito la opinión favorable de la Comisión Revisora que analizó su trabajo de tesis denominado "**Generación de entropía en un flujo MHD de un nanofluido a través de un canal poroso**" y que dicho trabajo cumple con los criterios metodológicos y de contenido, esta Dirección a mi cargo le **autoriza la impresión** del documento mencionado, para la defensa oral del mismo, en el examen que usted sustentará para obtener el Grado de Maestro en Materiales y Sistemas Energéticos Renovables. Se le pide observar las características normativas que debe tener el documento impreso y entregar en esta Dirección un tanto empastado del mismo.

Atentamente

"Por la Cultura de mi Raza"


Dra. María Adelina Schlie Guzmán
Directora.



DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN
Y POSGRADO

C.c.p. Expediente

Libramiento: Nono Paciente 1150 C.P. 29059
Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México
Tel: 01 (961) 61 70440 ext. 4350