



UNIVERSIDAD DE CIENCIAS Y ARTES DE CHIAPAS

**INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN E
INNOVACIÓN EN ENERGÍAS
RENOVABLES**

TESIS

**“Producción de entropía mínima en un flujo
MHD de un nanofluido híbrido por un canal
inclinado: efectos de generación interna de
calor, movimiento browniano y termoforesis”**

**MAESTRÍA EN MATERIALES Y
SISTEMAS ENERGÉTICOS
RENOVABLES**

PRESENTA

JOSÉ ALEJANDRO MONTES BALLINAS

DIRECTOR

DR. GUILLERMO ROGELIO IBÁÑEZ DUHARTE

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas

Marzo de 2026





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIENCIAS Y ARTES DE CHIAPAS

SECRETARÍA ACADÉMICA

Dirección de Investigación y Posgrado

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas a 17 de marzo de 2026

Oficio No. SA/DIP/0379/2026

Asunto: Autorización de Impresión de Tesis

C. José Alejandro Montes Ballinas

CVU: 1346925

Candidato al Grado de Maestro en Materiales y Sistemas Energéticos Renovables

Instituto de Investigación e Innovación en Energías Renovables

UNICACH

Presente

Con fundamento en la **opinión favorable** emitida por escrito por la Comisión Revisora que analizó el trabajo terminal presentado por usted, denominado **Producción de entropía mínima en un flujo MHD de un nanofluido híbrido por un canal inclinado: efectos de generación interna de calor, movimiento browniano y termoforesis** y como Director de tesis el Dr. Guillermo Rogelio Ibáñez Duharte (CVU: 215574) quien avala el cumplimiento de los criterios metodológicos y de contenido; esta Dirección a mi cargo **autoriza** la impresión del documento en cita, para la defensa oral del mismo, en el examen que habrá de sustentar para obtener el **Grado de Maestro en Materiales y Sistemas Energéticos Renovables**.

Es imprescindible observar las características normativas que debe guardar el documento, así como entregar en esta Dirección una copia de la *Constancia de Entrega de Documento Recepcional* que expide el Centro Universitario de Información y Documentación (CUID) de esta Casa de estudios, en sustitución al ejemplar empastado.

ATENTAMENTE
"POR LA CULTURA DE MI RAZA"

Dra. Dulce Karol Ramírez López
DIRECTORA



C.c.p. Dr. José Francisco Pola Albores, Director del Instituto de Investigación e Innovación en Energías Renovables, UNICACH. Para su conocimiento.

Mtro. Francisco Salvador Nigenda Blanco, Coordinador del Posgrado, Instituto de Investigación e Innovación en Energías Renovables, UNICACH. Para su conocimiento.

Archivo/minutario.

EPL/DKRL/igp/gtr



2026, Año de Margarita Maza
Año de Jaime Sabines



Ciudad Universitaria, Libramiento Norte
Poniente 1150, Col. Lajas Maciel
C.P. 29039, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México
Tel: (961) 6170440 Ext. 4360
investigacionyposgrado@unicach.mx

Agradecimientos

Agradezco al SECIHTI por el apoyo brindado mediante la beca que me permitió realizar y concluir este posgrado.

Expreso mi profundo agradecimiento al Dr. Guillermo Rogelio Ibáñez Duharte, asesor de esta tesis, por su guía, paciencia, orientación y respaldo a lo largo de todo este proceso de investigación.

Asimismo, agradezco a la Dra. Aracely López Grijalva, al Dr. Joel Pantoja Enríquez y al Dr. Orlando Lastres Danguillecourt, integrantes de mi comité tutorial, por sus observaciones, sugerencias y valiosas aportaciones, las cuales contribuyeron de manera importante al fortalecimiento de este trabajo.

A mis compañeros de la maestría, por haber formado un grupo tan unido y agradable, y por los momentos tan divertidos compartidos dentro y fuera del aula, que hicieron de esta etapa una experiencia aún más significativa.

A mis padres, José Luis Montes Santos y Mónica Ballinas Morales, por su apoyo incondicional, su amor, su confianza y por estar siempre presentes en cada paso de este camino. Este logro también es de ustedes.

A mi hermano, Luis Jesús Montes Ballinas, por su apoyo técnico y por su valiosa ayuda en la obtención de varios resultados numéricos de este trabajo.

A mi prometida, Mildred Daniela González Martínez, por su amor, comprensión, apoyo constante y por alentarme siempre, incluso en los momentos más difíciles.

Y, de manera muy especial, a Kyle, mi fiel compañero de desvelo, por acompañarme en tantas noches de trabajo y hacerlas un poco más llevaderas.

Resumen

Esta tesis tuvo como objetivo desarrollar un modelo matemático para optimizar el comportamiento térmico de un flujo magnetohidrodinámico (MHD) de un nanofluido híbrido en un canal inclinado y poroso, mediante la minimización de la producción de entropía, considerando los efectos del deslizamiento en las paredes, la generación interna de calor, la radiación térmica no lineal, el medio poroso, el movimiento browniano y la termoforesis. La novedad del trabajo radica en el análisis simultáneo de todos estos fenómenos dentro de un mismo modelo, incorporando además esfuerzo acoplado, disipación viscosa, disipación óhmica, succión e inyección en las placas y régimen Darcy–Forchheimer, lo cual amplía el alcance de estudios previos donde varios de estos efectos habían sido tratados de manera aislada o parcial.

Metodológicamente, se estableció la modelación física del sistema y se formularon las ecuaciones adimensionales de balance de momento, energía y concentración de masa, junto con sus condiciones de frontera, incluyendo deslizamiento hidrodinámico y condiciones térmicas de tercer tipo. Las propiedades termofísicas del nanofluido híbrido Al_2O_3 –Cu/agua fueron incorporadas mediante correlaciones adecuadas. El sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales se resolvió numéricamente utilizando el método de Runge–Kutta de cuarto orden en combinación con la técnica de disparo. A partir de las soluciones obtenidas se evaluaron los perfiles de velocidad, temperatura y concentración, así como la entropía local y global, el coeficiente de fricción y los números de Nusselt y Sherwood en ambas placas.

Los resultados mostraron que el comportamiento dinámico del sistema estuvo controlado principalmente por Γ , Da y Ha , mientras que la parte térmica estuvo dominada por Rd , Nr , Pr y Ec . En particular, el valor mínimo de entropía global fue $\langle S \rangle = 0.141945$, obtenido para $Rd = 0$ y $Nr = 0.1$, mientras que también se identificó $\langle S \rangle = 0.328908$ para $Nb = 0.6$ y $Le = 5$. En transferencia de calor, el máximo valor en la placa inferior fue $Nu_{y=0} = 3.79916$, correspondiente a $Rd = 1$ y $Pr = 0.1$, y en la placa superior la mayor magnitud fue $|Nu_{y=1}| = 4.62072$, para $Rd = 1$ y $Pr = 3$. En comportamiento hidráulico, el máximo coeficiente de fricción en la placa inferior fue $C_{f,y=0} = 0.0586254$, para $\Gamma = 1$ y $Da = 10$, mientras que el mínimo fue 0.00622715 , para $\Gamma = 0.1$ y $Ha = 5$. En transferencia de masa global, el máximo valor de $Sh_{y=0}$ fue 2.42598 ,

para $Le = 0.1$ y $Nb = 0.1$, y la mayor magnitud en la placa superior fue $|Sh_{y=1}| = 5.70973$, para $Le = 5$ y $Nb = 1.0$. Estos resultados permitieron identificar condiciones favorables de operación y confirmar que la radiación, la disipación interna y los mecanismos difusivos son determinantes en el desempeño termo–hidrodinámico y entrópico del sistema.

La tesis se organiza en cinco capítulos. En el Capítulo 1 se presentan la problemática, la justificación, los objetivos y los antecedentes principales del estudio. En el Capítulo 2 se desarrolla el marco teórico, incluyendo fundamentos de la segunda ley de la termodinámica, termodinámica irreversible lineal, ecuaciones generales de conservación, magnetohidrodinámica y propiedades termofísicas de nanofluidos híbridos. En el Capítulo 3 se expone la metodología y el desarrollo del modelo, abarcando la descripción física del sistema, la formulación matemática, la adimensionalización de las ecuaciones y el procedimiento numérico de solución. En el Capítulo 4 se presentan y discuten los resultados, analizando la influencia de los parámetros adimensionales sobre la velocidad, la temperatura, la concentración, la producción de entropía, la transferencia de calor, la fricción y la transferencia de masa global. Finalmente, en las Conclusiones Finales se sintetizan los hallazgos principales del trabajo y se proponen líneas de investigación futura.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Lista de figuras	VIII
Lista de tablas	XI
Nomenclatura	XII
Introducción	1
1. Generalidades	2
1.1. Introducción	2
1.2. Termodinámica Irreversible	2
1.3. Producción de Entropía en Flujos MHD	6
1.4. Aplicaciones Prácticas de Nanofluidos en Sistemas Energéticos	12
1.5. Influencia de Factores Físicos y Químicos en Flujos de Nanofluidos	17
1.6. Problemática	22
1.7. Objetivos	23
1.7.1. Objetivo General	23
1.7.2. Objetivos Particulares	23
1.8. Justificación	24
1.9. Conclusión	25
2. Marco Teórico	26
2.1. Introducción	26
2.2. Segunda ley de la termodinámica y entropía	27
2.3. Termodinámica Irreversible Lineal	27

2.4.	Ecuaciones generales de la mecánica de fluidos	29
2.4.1.	Conservación de la masa	29
2.4.2.	Conservación del momento lineal	30
2.4.3.	Conservación de la energía	31
2.5.	Ecuación de concentración de masa	32
2.6.	Nanofluido	34
2.6.1.	Nanofluido híbrido	34
2.6.2.	Propiedades termofísicas de los nanofluidos	35
2.7.	Magnetohidrodinámica	41
2.8.	Producción de entropía	43
2.9.	Conclusión	45
3.	Metodología y Desarrollo del Modelo	47
3.1.	Introducción	47
3.2.	Metodología	48
3.3.	Modelo físico y consideraciones básicas del sistema	51
3.4.	Ecuación de balance de momento	52
3.4.1.	Condiciones de fronteras asociadas de deslizamiento	53
3.5.	Ecuación de balance de energía	53
3.5.1.	Condiciones de fronteras por radiación y convección asociadas	55
3.6.	Ecuación de concentración de masa	55
3.6.1.	Condiciones de fronteras para la ecuación de concentración	55
3.7.	Definición de las variables adimensionales	56
3.8.	Ecuación adimensional de balance de momento	57
3.9.	Ecuación adimensional de balance de energía	57
3.10.	Ecuación adimensional de concentración de masa	58
3.11.	Propiedades termofísicas del nanofluido	58
3.12.	Generación de entropía	59
3.13.	Transferencia de calor: número de Nusselt	62
3.14.	Coeficiente de fricción	63
3.15.	Transferencia de masa	64
3.16.	Solución numérica	65
3.17.	Validación matemática del modelo y del método numérico	67
3.18.	Conclusión	71
4.	Resultados y Discusión	73
4.1.	Comportamiento dinámico	74

4.2. Comportamiento térmico	77
4.3. Transferencia de masa	80
4.4. Producción de entropía	84
4.5. Coeficiente de fricción	95
4.5.1. Coeficiente de fricción en la placa inferior	95
4.5.2. Coeficiente de fricción en la placa superior	97
4.6. Transferencia de calor: número de Nusselt	100
4.6.1. Placa inferior	100
4.6.2. Placa superior	102
4.7. Transferencia de masa global: número de Sherwood	104
4.7.1. Placa inferior	104
4.7.2. Placa superior	106
4.8. Conclusión	109
Conclusiones Finales	111
Bibliografía	115

Lista de figuras

1.1. Configuración geométrica del microcanal MHD de placas paralelas.	9
1.2. Esquema del canal poroso MHD con deslizamiento y condiciones de contorno convectivas.	10
1.3. Microcanal poroso para flujo MHD Couette–Poiseuille con succión e inyección.	11
1.4. Configuración geométrica del microcanal poroso MHD con deslizamiento y succión/inyección.	15
1.5. Microcanal vertical MHD con deslizamiento, medio poroso y transferencia radiativa.	16
1.6. Esquema del microcanal inclinado con medio poroso y flujo MHD bajo gradiente de presión.	17
1.7. Canal de placas paralelas con medio poroso para flujo radiativo MHD.	18
3.1. Diagrama de flujo de la metodología.	50
3.2. Geometría del modelo físico.	52
4.1. Perfil de velocidad $u(y)$ para distintos valores de Γ	75
4.2. Perfil de velocidad $u(y)$ para distintos valores de Da con $\Gamma = 0.5$	76
4.3. Perfil de velocidad $u(y)$ para distintos valores de Hartmann Ha con $\Gamma = 0.5$. . .	76
4.4. Perfil de velocidad $u(y)$ para distintos valores de Eckert Ec con $\Gamma = 0.5$	77
4.5. Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Rd	78
4.6. Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Nr con $Rd = 0.5$.	78
4.7. Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Rd con $Pr = 3$.	79
4.8. Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Pr con $Rd = 0.5$.	80
4.9. Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Ec con $Rd = 0.5$.	80
4.10. Perfiles de concentración $\phi(y)$ para distintos valores de termoforesis Nt con $Nb = 1$	81
4.11. Perfiles de concentración $\phi(y)$ para distintos valores de difusión browniana Nb con $Nt = 0.6$	82

4.12. Perfil de concentración adimensional $\phi(y)$ para distintos valores de Nb	82
4.13. Perfil de concentración adimensional $\phi(y)$ para distintos valores de Le , con $Nb = 0.6$	83
4.14. Perfil de concentración adimensional $\phi(y)$ para distintos valores de Re , con $Nb = 0.6$	84
4.15. Perfil de entropía local $S(y)$ para distintos valores de Γ	85
4.16. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Γ para distintos valores de Da	86
4.17. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Γ para distintos valores de Hartmann Ha . . .	86
4.18. Entropía local $S(y)$ para distintos valores de Γ , con $Ec = 10$	87
4.19. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Γ para distintos valores de Ec	88
4.20. Entropía local $S(y)$ para distintos valores de Rd	89
4.21. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Rd para distintos valores de Nr	89
4.22. Perfil de entropía local $S(y)$ para distintos valores de Rd con $Pr = 3$	90
4.23. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Rd para distintos valores de Pr	90
4.24. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Rd para distintos valores de Ec	91
4.25. Entropía local $S(y)$ para distintos valores de termoforesis Nt con $Nb = 1$	92
4.26. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Nt para distintos valores de Nb	92
4.27. Entropía local $S(y)$ para distintos valores de Nb	93
4.28. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Nb para distintos valores de Le	94
4.29. Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Nb para distintos valores de Re	94
4.30. Coeficiente de fricción en la placa inferior, $C_{fy=0}$, en función de Γ para distintos valores de Da	95
4.31. Coeficiente de fricción en la placa inferior, $C_{fy=0}$, en función de Γ para distintos valores de Hartmann Ha	96
4.32. Coeficiente de fricción en la placa inferior, $C_{fy=0}$, en función de Γ para distintos valores de Ec	97
4.33. Coeficiente de fricción en la placa superior, $C_{fy=1}$, en función de Γ para distintos valores de Da	98
4.34. Coeficiente de fricción en la placa superior, $C_{fy=1}$, en función de Γ para distintos valores del número de Hartmann Ha	99
4.35. Coeficiente de fricción en la placa superior, $C_{fy=1}$, en función de Γ para distintos valores de Ec	99
4.36. Número de Nusselt en la placa inferior, $Nu_{y=0}$, en función de Rd para distintos valores de Nr	100
4.37. Número de Nusselt en la placa inferior, $Nu_{y=0}$, en función de Rd para distintos valores de Pr	101

4.38. Número de Nusselt en la placa inferior, $Nu_{y=0}$, en función de Rd para distintos valores de Ec	102
4.39. Número de Nusselt en la placa superior, $Nu_{y=1}$, en función de Rd para distintos valores de Nr	103
4.40. Número de Nusselt en la placa superior, $Nu_{y=1}$, en función de Rd para distintos valores de Pr	103
4.41. Número de Nusselt en la placa superior, $Nu_{y=1}$, en función de Rd para distintos valores de Ec	104
4.42. Número de Sherwood en la placa inferior $Sh_{y=0}$ en función de Nt para distintos valores de Nb	105
4.43. Número de Sherwood en la placa inferior $Sh_{y=0}$ en función de Nb para distintos valores de Le	106
4.44. Número de Sherwood en la placa inferior $Sh_{y=0}$ en función de Nb para distintos valores de Re	106
4.45. Número de Sherwood en la placa superior $Sh_{y=1}$ en función de Nt para distintos valores de Nb	107
4.46. Número de Sherwood en la placa superior $Sh_{y=1}$ en función de Nb para distintos valores de Le	108
4.47. Número de Sherwood en la placa superior $Sh_{y=1}$ en función de Nb para distintos valores de Re	108

Lista de tablas

3.1. Propiedades termofísicas del agua y de las nanopartículas sólidas.	59
3.2. Cálculo punto a punto del RMSE para la velocidad $u(y)$ (validación).	68
3.3. Cálculo punto a punto del RMSE para la temperatura $\theta(y)$ (validación).	69
3.4. Cálculo punto a punto del RMSE para la entropía local $S(y)$ (validación).	69
3.5. Cálculo punto a punto del error relativo y del error relativo promedio para $u(y)$	70
3.6. Cálculo punto a punto del error relativo y del error relativo promedio para $\theta(y)$	70
3.7. Cálculo punto a punto del error relativo y del error relativo promedio para $S(y)$	71

Nomenclatura

Símbolo	Descripción
a	longitud característica del canal, distancia entre placas [m]
B_0	intensidad del campo magnético aplicado [T]
Bi	número de Biot [-]
Bi_m	número de Biot de masa [-]
Br	número de Brinkman [-]
C	concentración de nanopartículas [kg m^{-3}]
C_p	capacidad calorífica específica [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$]
Cf	coeficiente de fricción superficial [-]
Da	número de Darcy [-]
D_B	coeficiente de difusión browniana [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
D_T	coeficiente de difusión termofórica [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
Ec	número de Eckert [-]
F	coeficiente de Forchheimer [-]
g	aceleración gravitacional [m s^{-2}]
Gr	número de Grashof [-]
h	coeficiente convectivo de transferencia de calor [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$]
h_m	coeficiente de transferencia de masa [m s^{-1}]
Ha	número de Hartmann [-]
k	conductividad térmica [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$]
k^*	coeficiente medio de absorción de Rosseland [m^{-1}]
K	permeabilidad del medio poroso [m^2]
Le	número de Lewis [-]
Nb	parámetro de movimiento browniano [-]

Símbolo	Descripción
Nr	parámetro radiativo convectivo [-]
p	presión [Pa]
P	gradiente de presión adimensional [-]
Pe	número de Peclet [-]
Pr	número de Prandtl [-]
q	flujo de calor por unidad de área [W m^{-2}]
q_r	flujo de calor radiativo [W m^{-2}]
Rd	parámetro de radiación térmica [-]
Re	número de Reynolds [-]
S'	generación local de entropía [$\text{W m}^{-3} \text{K}^{-1}$]
$\langle S \rangle$	generación global de entropía o entropía promedio [-]
Sh	número de Sherwood [-]
T	temperatura [K]
T_b	temperatura media del fluido en la sección transversal [K]
u'	velocidad axial dimensional [m s^{-1}]
v_0	velocidad uniforme de succión/inyección [m s^{-1}]
x'	coordenada axial dimensional [m]
y'	coordenada transversal dimensional [m]

Símbolos griegos

Símbolo	Descripción
α'	longitud de deslizamiento [m]
β	coeficiente de expansión térmica [K^{-1}]
γ	ángulo de inclinación del canal [rad]
δ	coeficiente de esfuerzo acoplado [Ns]
ε	emisividad superficial [-]
η	viscosidad dinámica [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$]
θ	temperatura adimensional [-]

Símbolo	Descripción
θ_h	parámetro de temperatura adimensional[-]
λ	parámetro de esfuerzo acoplado [-]
ν	viscosidad cinemática [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
ρ	densidad [kg m^{-3}]
σ	conductividad eléctrica [S m^{-1}]
σ^*	constante de Stefan–Boltzmann [$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$]
τ_w	esfuerzo cortante en la pared [Pa]
Φ	concentración adimensional de nanopartículas [-]
ϕ	fracción volumétrica total de nanopartículas [-]
ω	difusividad térmica [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
Γ	parámetro inverso del esfuerzo acoplado [-]

Subíndices

Subíndice	Descripción
1	placa inferior
2	placa superior
a	ambiente o condición de referencia fría
f	fluido base
h	condición caliente o pared caliente
nf	nanofluido
s	nanopartícula sólida
$s1$	primera nanopartícula sólida (Al_2O_3)
$s2$	segunda nanopartícula sólida (Cu)

Introducción

La historia humana está plagada de relatos de ingenio humano, creación e innovación. Una de las etapas con muchas historias de invención es la Revolución Industrial, que comenzó en Gran Bretaña a finales del siglo XVIII y llegó a los Estados Unidos en las décadas siguientes. Algunos cambios destacables de este periodo fueron el cambio de mano de obra a maquinaria, la máquina de vapor, el crecimiento económico y la urbanización, por mencionar algunas cosas. Fue tanto el impacto y el avance tecnológico desde esta etapa que nuestro mundo moderno es consecuencia de todo esto.

En particular, la máquina de vapor fue una de las invenciones más importantes. Fue utilizada para alimentar una amplia gama de máquinas y equipos industriales. Esta máquina funcionaba con la energía liberada por la expansión del vapor de agua, siguiendo un ciclo termodinámico donde el vapor se expande en un cilindro, para realizar trabajo mecánico y luego ser condensado para volver a ser utilizado. Era de vital importancia saber la eficiencia de estas máquinas para su éxito en la industria. Esto se puede entender gracias al ingeniero y físico teórico Nicolás Carnot, gracias a su formulación del ciclo termodinámico ideal conocido como el ciclo de Carnot. Este estudio proporciona un marco teórico crucial para conocer la eficiencia de la máquina de vapor, y en general, de cualquier proceso termodinámico.

El ciclo de Carnot es un ciclo termodinámico ideal que consiste en cuatro procesos reversibles. Este ciclo es una perfección idealizada de los procesos termodinámicos. Contrario a lo que sucede en los procesos de la naturaleza y la ingeniería. En la práctica, los procesos termodinámicos son en su mayoría irreversibles, como por ejemplo la pérdida de calor a través de las paredes de algún dispositivo. Estas irreversibilidades reducen la eficiencia de la máquina respecto al ciclo de Carnot. Esto hace evidente que los procesos irreversibles representan una limitación fundamental para la eficiencia de los sistemas termodinámicos. La comprensión de las irreversibilidades permite a los ingenieros y científicos evaluar y mejorar la eficiencia de los sistemas reales, buscando minimizar pérdidas de energía en la medida de lo posible.

Capítulo 1

Generalidades

1.1. Introducción

El análisis de los flujos magnetohidrodinámicos (MHD) de nanofluidos híbridos y su impacto en la optimización de sistemas térmicos energéticamente eficientes requiere una sólida base conceptual en termodinámica y mecánica de fluidos. Este capítulo establece los fundamentos contextuales necesarios para abordar este tema. Se realiza una revisión histórica y conceptual de la termodinámica, comenzando con los principios básicos establecidos por figuras clave como Carnot, Clausius, y Kelvin, y su evolución hacia la termodinámica de procesos irreversibles, que juega un papel central en el estudio de la optimización energética.

Asimismo, se exploran los conceptos de producción de entropía y eficiencia exergética como herramientas fundamentales para la evaluación de sistemas térmicos. Además, se discuten aplicaciones prácticas de los nanofluidos en sistemas energéticos, destacando su papel en la mejora de la transferencia de calor y la reducción de pérdidas energéticas. Finalmente, se identifican factores físicos y químicos que influyen en los flujos de nanofluidos, sentando las bases para el desarrollo del modelo y la metodología presentados en los capítulos siguientes.

1.2. Termodinámica Irreversible

Como sabemos, la termodinámica clásica es una de las ramas fundamentales de la física, que se encarga de estudiar las relaciones entre trabajo, energía y calor. Se dice, que la termodinámica se consolidó en el siglo XIX con la publicación del trabajo de Sadi Carnot ingeniero y físico francés, llamado “REFLECTIONS ON THE MOTIVE POWER OF FIRE” en 1824, que fue uno de los primeros intentos importantes de comprender y explicar la teoría de los motores

térmicos: máquinas que convierten el calor en trabajo útil [1].

En este trabajo Carnot se hizo dos preguntas críticas que intentó responder, una de ellas era si el uso de una sustancia además del vapor podría mejorar el rendimiento de las máquinas térmicas y la otra era, si las máquinas térmicas podrían ser cien por ciento eficientes, es decir, convertir todo el calor que reciben en trabajo útil. Para esto, Carnot analizó un ciclo térmico ideal, el cual ahora se llama en su honor, ciclo de Carnot. Además, estudió la eficiencia térmica y la teoría de calor y trabajo. Lo que concluyó fue que, en teoría, la eficiencia de una máquina térmica dependía de las temperaturas entre las que funciona, no de la sustancia que funciona. Por lo que, se logra una mayor eficiencia cuando hay una mayor diferencia entre la temperatura a la que se suministra calor a una máquina térmica y la temperatura a la que se rechaza o descarga calor de esa máquina [2].

También podemos mencionar algunos otros científicos distinguidos e importantes para el desarrollo de la termodinámica para lo que es hoy en día; tales como Rudolf Clausius, físico de origen alemán, quien formulo la segunda ley de la termodinámica en términos matemáticos en 1850. En 1857 a través de su obra “On the nature of the motion which we call heat” introdujo el concepto de entropía. En su trabajo, Clausius concluyó

“No es posible ningún proceso cuyo único resultado sea la extracción de calor de un cuerpo frío a otro más caliente.” [3]

Se encuentra igualmente William Thomson (Lord Kelvin), físico y matemático británico, quien propuso el concepto de temperatura absoluta (escala Kelvin) en 1848. Esta escala de temperatura, se basa en la temperatura teórica donde cesa el movimiento molecular (cero absoluto) Este es un parámetro muy importante para la termodinámica y sus subáreas. También junto con Planck trabajaron su propia versión de la segunda ley de la termodinámica, enunciando que

“No es posible un proceso que convierta todo el calor absorbido en trabajo.” [4]

Pasándonos un poco a lo que es la teoría microscópica de la termodinámica, la termodinámica estadística, tenemos a James Clerk Maxwell fue un físico teórico escocés cuyo trabajo más conocido son sus ecuaciones que originaron la teoría electromagnética clásica, también contribuyó al desarrollo de la teoría cinética de los gases. Esta contribución describe la distribución de velocidades de las partículas de un gas ideal a través de la distribución Maxwell-Boltzman.

Y aunque la lista podría seguir, por último mencionaré a Josiah Willard Gibbs matemático y físico estadounidense, cuya obra es considerada un pilar en el desarrollo de la termodinámica estadística. La termodinámica estadística nos proporciona una relación entre las propiedades macroscópicas de un sistema termodinámico y las propiedades microscópicas de sus componentes. También, desarrollo el concepto de potencial termodinámico, con el que formuló ecuaciones termodinámicas en términos de potenciales químicos y energía libre [5].

Todo este trabajo en conjunto dio como resultado a la rama de la física llamada Termodinámica. Uno de sus principales usos es en el campo de la ingeniería, en donde, construir un sistema con el mejor rendimiento posible siempre ha sido la prioridad durante su diseño. Mediante la optimización, que es el acto de obtener el mejor resultado en determinadas circunstancias, podemos encontrar las condiciones necesarias para la obtención de un resultado favorable. La termodinámica nos proporciona los conceptos de energía, transferencia de energía por calor y trabajo, balance energético, entropía, etc. Así como fórmulas matemáticas para calcular propiedades termodinámicas.

A partir de la segunda ley de la termodinámica podemos complementar y mejorar el balance energético al permitir el cálculo tanto del valor verdadero termodinámico de un portador de energía como de las ineficiencias y pérdidas termodinámicas reales de los procesos o sistemas [6]. En particular, en los sistemas donde la termodinámica y la mecánica de fluidos se hacen presentes, es de gran interés el estudio de la optimización de la energía, con el fin de mejorar la eficiencia y reducir las pérdidas de energía, considerando como ‘sistema energético’ a cualquier sistema que transforma energía de una forma a otra (o a otras formas) o transfiere energía de un lugar a otro o de un cuerpo a otro [7].

Conforme el tiempo pasaba y los científicos avanzaban en la comprensión de los procesos termodinámicos, era evidente que los procesos naturales no son reversibles, es decir, no siguen un camino que pueda ser revertido sin dejar cambios en el entorno. Entonces era realmente importante saber qué sucedía con las ineficiencias y pérdidas.

Esto nos conduce a recurrir a la termodinámica de los procesos irreversibles (TPI), que es un campo de estudio evolucionado de la termodinámica clásica creada en el siglo XX, debido a la necesidad de estudiar los procesos irreversibles. Personajes como Carnot y Boltzman sentaron las bases para la TPI con sus trabajos sobre el ciclo de Carnot y la teoría estadística de los gases. Mientras que Clausius contribuye con la segunda ley de la termodinámica que es fundamental para analizar los procesos irreversibles. Algunas investigaciones remarcables son las siguientes.

En 1930 el físico y matemático noruego Lars Onsager hizo contribuciones fundamentales; formuló las llamadas relaciones de reciprocidad de Onsager", que proporcionan una descripción

matemática de cómo las fuerzas termodinámicas (como gradientes de temperatura y concentración) se relacionan con los flujos termodinámicos (como el flujo de calor y la difusión). [8] Estas relaciones fueron obtenidas en el estudio de procesos irreversibles, por lo que proporcionan una forma de entenderlos más en profundidad.

En 1940, Carl Eckart, físico, oceanógrafo y geofísico estadounidense, examina en términos generales la posibilidad de construir una teoría sistemática de los procesos irreversibles. Se formulan en forma matemática explícita, pero general tres supuestos que fundamentan la aplicación de la segunda ley de Gibbs a los problemas de equilibrio. Se demuestra que restringen las ecuaciones que gobiernan los cambios irreversibles. Desarrolla también, la teoría de una mezcla general de líquidos y luego se aplica a mezclas de gases ideales [9].

En 1953 Ilya Prigogine, físico, químico, sistémico y catedrático universitario de origen ruso, escribió “Sur la Mécanique Statistique des Phénomènes Irreversibles III” que es una serie de artículos que profundizan en la mecánica estadística de procesos irreversibles en conjuntos lineales de osciladores armónicos donde solo interactúan los vecinos más próximos [10]. Su trabajo más reconocido es “Thermodynamics of Irreversible Processes” publicado en 1955, trabajo que le haría ganar el premio nobel en 1977.

También Prigogine, junto a su colaborador R Balescu desarrollaron un método general para estudiar fenómenos irreversibles en gases, aplican el método en algunas situaciones simples y luego exploran la posibilidad de un método general para estudiar fenómenos irreversibles en gases no homogéneos [11].

Cabe mencionar que también existe el enfoque de la estadística cuántica analizado por Van Hove y Janner con los artículos [12, 13] presentan un enfoque de la mecánica estadística buscando equilibrio y reversibilidad microscópica. Ellos han desarrollado una teoría muy general de los sistemas en desequilibrio. Su objetivo ha sido derivar ecuaciones que describan la evolución de los sistemas en desequilibrio que sean válidas en condiciones muy generales. Sin embargo, hasta ahora se han hecho muy pocas aplicaciones prácticas de sus resultados [14].

La TPI proporciona un marco teórico fundamental para entender la eficiencia de los dispositivos y procesos de transporte, basándose en la segunda ley de la termodinámica [15]. Podemos decir que la irreversibilidad se identifica como un fenómeno probabilístico en el que los cuerpos progresan desde campos de baja probabilidad a campos de alta probabilidad. En un sentido más práctico, fenómenos irreversibles o disipativos como la difusión, la fricción y la conducción de calor (creados por gradientes de potenciales químicos, velocidad y temperatura, respectivamente) pueden describirse mediante ecuaciones diferenciales parabólicas [16]. Los métodos de la TPI proporcionan relaciones lineales entre fuerzas termodinámicas, como los gradientes de ve-

locidad y temperatura, y flujos termodinámicos, como la tensión desviatoria y el flujo de calor. Entonces, a partir de la segunda ley de la termodinámica, se busca minimizar la producción de entropía asociada al sistema, esto para saber qué tanta es la irreversibilidad de los procesos que lo conforman y obtener información para la optimización.

Otra forma de atacar el problema de la optimización es usando el concepto de exergía. La exergía es el trabajo útil máximo que se puede obtener de un portador de energía en las condiciones impuestas por un entorno determinado. La exergía de un portador de energía es una propiedad termodinámica que depende tanto del estado del portador considerado como del estado del medio ambiente [6]. Existen algunos otros conceptos que pueden llegar a relacionarse, tales como el trabajo perdido, el calor no compensado o la disipación [17–19]. El camino de la minimización de la entropía parece ser el más prometedor, al considerar la producción interna de entropía como una medida de irreversibilidad, se busca determinar la mínima cantidad de energía requerida para obtener el máximo beneficio de una transformación dada, [20].

1.3. Producción de Entropía en Flujos MHD

Como vimos en la sección anterior, las pérdidas de energía resultan ser irreversibles, esto influye en el rendimiento del sistema, lo que conduce a una reducción en la eficiencia. Esta pérdida en la eficiencia del sistema puede ser caracterizada a través de una función degeneración de entropía. Entonces, el cálculo de la entropía puede ser una herramienta muy útil al momento de querer hacer un análisis la optimización en dispositivos que funcionen a través de la transferencia de calor y flujo de fluidos. En esta sección haremos una revisión de investigaciones que toman en cuenta la producción de entropía en los flujos magnetohidrodinámicos (MDH).

Como primer material, tenemos el análisis del rendimiento de un generador de Faraday MHD alternativo, expuesto por Ibáñez et al. en [21]. En él se estudia la producción de energía eléctrica a través del movimiento oscilatorio de un fluido conductor de electricidad en un generador Faraday de electrodo continuo. El rendimiento de este sistema se analiza utilizando la eficiencia eléctrica isotrópica convencional y una eficiencia general de segunda ley, basada en la tasa de generación de entropía global. La eficiencia general de segunda ley se utiliza para determinar las condiciones de operación óptimas que minimizan las irreversibilidades del proceso. El documento establece el modelo teórico del generador, se calculan los campos de velocidad, de temperatura y la eficiencia isotrópica eléctrica. Se analiza la tasa de generación de entropía local y global para el flujo oscilatorio en el canal MHD. También, se define la eficiencia de la segunda ley y se utiliza para determinar las condiciones de operación óptimas. Los resultados informados aquí evidencian que la eficiencia general de segunda ley basada en la tasa de generación de

entropía es una herramienta útil para el modelado de dispositivos MHD.

En la referencia [22], Ibáñez et al. investigaron la optimización termodinámica del flujo radial MHD entre discos circulares paralelos. Esto con el objetivo de determinar las condiciones óptimas de transferencia de calor por convección en las superficies externas del disco para minimizar las irreversibilidades intrínsecas. Se considera una configuración geométrica que hace que el flujo dependa tanto de las coordenadas radiales como de las transversales. Se incluyen efectos de convección de calor, junto con efectos de difusión. También, se tienen en cuenta las irreversibilidades debidas a la disipación de Joule, además de las producidas por la viscosidad y la transferencia de calor. Como criterio de optimización se utilizó la tasa global de generación de entropía, que tiene en cuenta las irreversibilidades presentes en el sistema debido a la fricción, el flujo de calor y la conducción eléctrica. Se descubrió que el número de Nusselt medio en la pared superior muestra un valor máximo para un valor dado del número de Hartman; este número de Nusselt medio para la transferencia de calor máxima está cerca de su valor para las condiciones de generación de entropía mínima.

Saidi et al. evaluaron el rendimiento de un generador MHD que utiliza plasma como fluido de trabajo desde el punto de vista de la segunda ley de la termodinámica en la cita [23]. En este trabajo se ha inspeccionado la naturaleza de las irreversibilidades que ocurren en el generador, se toma en cuenta el parámetro Hall y de igual manera se consideró la dependencia de las propiedades del plasma, los coeficientes de conductividad eléctrica y térmica y la viscosidad. Con la información que se obtiene sobre como se comporta el plasma en el generador, el autor aplica el enfoque de minimización de la generación de entropía para buscar las condiciones de trabajo óptimas, y mejorar la eficiencia de conversión. Se revelan contrastes entre los generadores de metal líquido y los generadores de plasma, como que, a diferencia de los generadores de metal líquido, en el generador de plasma la disipación de Joule no juega un papel dominante en la destrucción del trabajo útil disponible. También, se proporciona un método de solución que ayuda a investigar el efecto de varios parámetros en el rendimiento del generador. Estos resultados se utilizaron para investigar tanto la naturaleza de las irreversibilidades en el generador como su rendimiento en función de parámetros como el factor de carga, la relación de presión y la fuerza del campo magnético.

En el estudio [24], Arikoglu et al. investigan el efecto del deslizamiento y la disipación de Joule, en la generación de entropía en flujo MHD sobre un disco libre giratorio en un fluido newtoniano y eléctricamente conductor para condiciones de flujo laminar y estacionario, donde el campo magnético existente es constante y actúa solo en la dirección axial utilizando una técnica de solución analítica seminumérica. Se obtienen las ecuaciones que rigen los campos de flujo y térmicos de los sistemas de tipo rotatorio con las condiciones de contorno. Estas ecuaciones,

las cuales son no lineales, se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el enfoque de Von Karman, y luego se resuelven mediante el método de transformación diferencial (DTM). También, se derivan ecuaciones de generación de entropía relacionadas que, a través de consideraciones geométricas y físicas dependientes del campo de flujo, pueden hacerse adimensionales. Al minimizar la generación de entropía, se encuentra equipartición entre la irreversibilidad de la fricción del fluido y la disipación de Joule. Se determina la equipartición de la generación de entropía entre la irreversibilidad por fricción y la disipación de Joule y se presenta gráficamente, junto con estudios paramétricos, de los efectos combinados del deslizamiento y el campo magnético en la generación de entropía. De igual manera como en otras investigaciones ya mencionadas, acá también se investigan los parámetros del sistema que minimizan la generación de entropía para evaluar el rendimiento óptimo del sistema. Este estudio puede proporcionar al diseñador información útil, para que utilice la segunda ley de la termodinámica en los cálculos de eficiencia de los sistemas rotatorios.

Otra revisión importante es Ibáñez et al. [25], que se enfocó en estudiar la minimización de la generación de entropía de un flujo MHD en un microcanal de placas paralelas con paredes de espesor finito, ver figura 1.1. En este trabajo, se analizan los procesos disipativos que surgen en un flujo de microcanal sometido a interacciones electromagnéticas. A partir de las expresiones analíticas para los campos de velocidad y temperatura se calcula la tasa de generación de entropía local en el microcanal. La tasa de generación de entropía se utiliza como herramienta para la evaluación de las irreversibilidades propias del microcanal presentes en él debido a la fricción viscosa, el flujo de calor y la conducción eléctrica. Al integrar la tasa de generación de entropía en toda la región de análisis, de modo que se consideren las dimensiones finitas del microdispositivo, junto con las soluciones analíticas para la densidad de corriente eléctrica en el fluido, y para los campos de temperatura y densidad de corriente eléctrica en las paredes se usan obtener la tasa de generación de entropía global explícitamente en términos de los parámetros adimensionales del problema. La función de tasa de generación de entropía considera las irreversibilidades de fricción, térmicas y electromagnéticas en el fluido, así como las irreversibilidades electromagnéticas y térmicas en las paredes del microcanal, que también influyen en el comportamiento disipativo del sistema. Mediante el análisis de la tasa de generación de entropía global, se determinan las condiciones para una pérdida de energía total mínima debido a irreversibilidades. También, se demostró que la tasa de generación de entropía global se puede minimizar en diferentes condiciones que involucran relaciones específicas de los parámetros geométricos y físicos del microcanal y el fluido, una geometría particular o condiciones de operación dadas del microcanal. También se calcula y explora el número de Nusselt para diferentes condiciones.

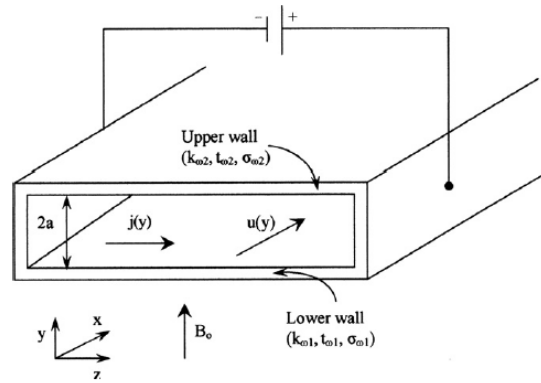


Figura 1.1: Configuración geométrica del microcanal MHD de placas paralelas. Fuente: [25].

Algunos otros antecedentes que podemos exponer acá son los siguientes. Por ejemplo, Vyas et al. [26], en este artículo presentan un análisis de entropía del flujo de fluido Couette generalizado MHD dentro de un conducto compuesto por dos paredes paralelas, parcialmente lleno de un medio poroso. La pared superior y la inferior sufren un enfriamiento convectivo asimétrico. Nuevamente, aquí las soluciones obtenidas para el campo de velocidad y temperatura, o bien, las soluciones para las ecuaciones de momento y energía se usaron para calcular la generación de entropía. Se aplica la ley de enfriamiento de Fourier-Newton en la pared superior y en el fondo, que es una condición de contorno térmico de tercer tipo. Esta condición afecta el comportamiento térmico del flujo dentro del canal. Se obtienen los perfiles de las distribuciones de temperatura, los cuales son asimétricos con respecto a la línea central del canal debido a las condiciones de temperatura asimétricas en las paredes y el sustrato poroso adherido a la pared inferior. Sugiriendo que el número de generación de entropía es mínimo en la región central del fluido limpio y máximo cerca de las paredes del canal. El número de generación de entropía aumenta con el campo magnético en todo el canal, excepto en alguna parte de la región de fluido transparente, y disminuye al disminuir el valor del número de Brinkman (Br) en todo el canal y desaparece en un cierto valor del eje y y en la región de fluido limpio. Y es posible hacer que disminuya en todo el canal, excepto cerca del fondo impermeable inferior del canal, al aumentar la permeabilidad de este sustrato poroso. También se encontró, que el número de generación de entropía al aumentar el espesor del sustrato poroso adherido a la pared inferior.

En el artículo [27], Rashidi et al. investigan los efectos del número de interacción magnética, el factor de deslizamiento y la diferencia de temperatura relativa sobre los perfiles de velocidad y temperatura. También, se estudia la generación de entropía en flujo MHD y deslizamiento sobre un disco infinito poroso giratorio con propiedades variables del fluido, utilizando métodos numéricos. De igual manera Arikoglu et al. en [24], el sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que describen los campos térmicos y el flujo se reducen a ecuaciones

diferenciales ordinarias por medio de variables de similitud de Von Karman y luego se resuelven numéricamente. Se esbozan diferentes perfiles de velocidades y los perfiles de temperatura, la tasa de generación de entropía promedio y el número de Bejan promedio para diferentes valores de parámetros relacionados como son el número de interacción magnética, el factor de deslizamiento, la diferencia de temperatura relativa y el parámetro de succión/inyección. También se usan los métodos de Runge-Kutta y shooting.

En el trabajo [28], Ibáñez et al. estudian los efectos combinados del deslizamiento hidrodinámico, el campo magnético, el número de Reynolds de succión/inyección y las condiciones de contorno convectivas sobre la generación de entropía global en un flujo constante de un fluido conductor de electricidad incompresible a través de un canal poroso MHD con placas permeables, con deslizamiento hidrodinámico y condiciones de contorno convectivas. La disposición del experimento se puede ver en la figura 1.2. Al igual que en [26] se aplican condiciones de contorno térmicas del tercer tipo. Se muestra que es posible determinar valores óptimos para los parámetros que conducen a una tasa mínima de generación de entropía global, tales como el número de Hartmann, de Biot, de Prandtl y de Reynolds. Detalladamente, se encontró que el valor óptimo del número de Hartmann disminuye con el parámetro de deslizamiento, mientras que los valores óptimos de Prandtl y Reynolds aumentan con el parámetro de deslizamiento. El análisis de estas observaciones indicó que la entropía global siempre aumenta con el flujo de deslizamiento debido principalmente a la disminución de la temperatura del sistema. Además, se encontró que la minimización de la generación de entropía se puede lograr mediante una combinación apropiada de los parámetros geométricos y físicos del sistema.

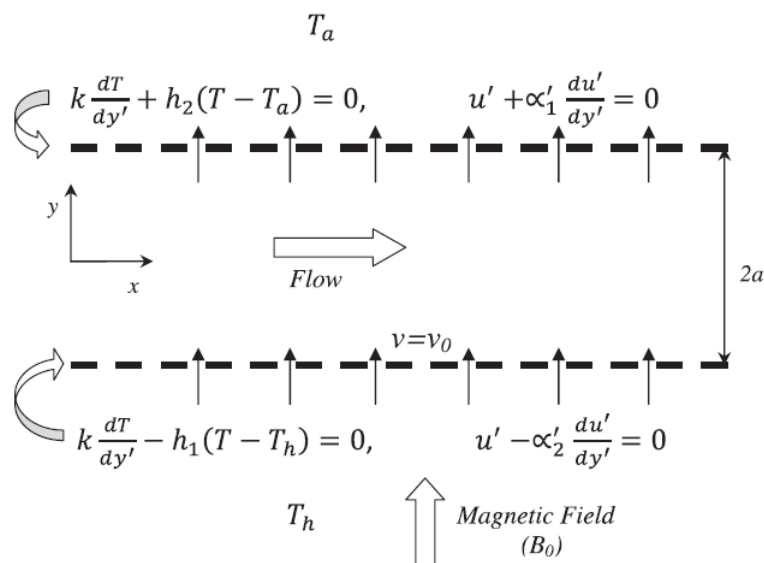


Figura 1.2: Esquema del canal poroso MHD con deslizamiento y condiciones de contorno convectivas. Fuente: [28].

Como último antecedente a revisar tenemos a Ibáñez et al. con [29], en su contenido se estudia el flujo, la transferencia de calor y la generación de entropía en un flujo MHD Couette-Poiseuille a través de un microcanal vertical hecho de dos placas porosas paralelas, donde la placa de inyección se mantiene en reposo mientras la placa de succión se mueve hacia arriba/abajo. El experimento se monta como en la figura 1.3. Se toma en cuenta el deslizamiento, succión-inyección, radiación y la acción combinada de la fuerza de flotación, el campo magnético transversal. También se considera el gradiente de presión variable debido al flujo de Couette-Poiseuille (C-P). Las soluciones a las ecuaciones básicas se obtienen mediante métodos numéricos utilizando el método de Runge-Kutta-Fehlberg junto con la técnica de shooting, al igual que en [27]. Uno de los resultados principales es que pueden distinguir tres tipos de flujos, los cuales se estudian buscando los parámetros operativos usuales.

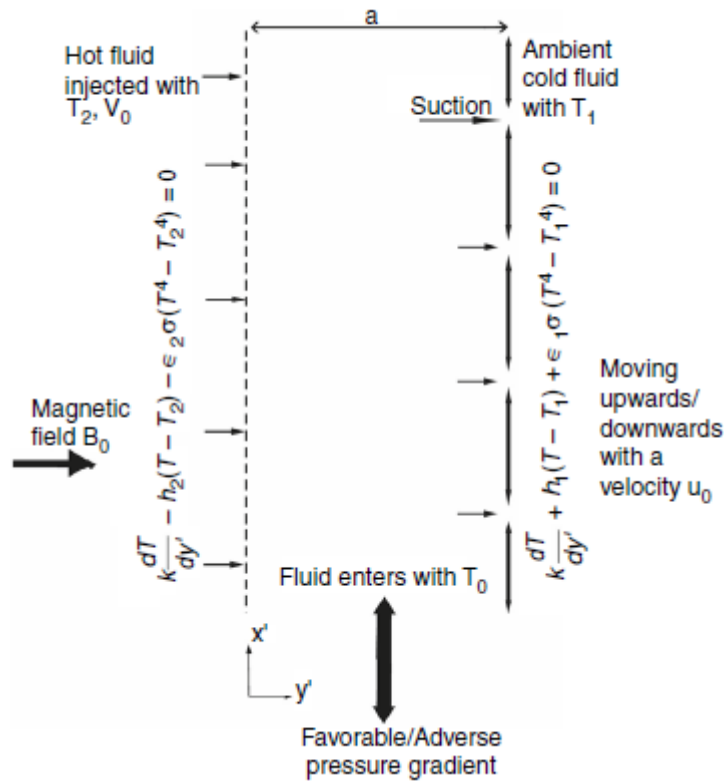


Figura 1.3: Microcanal poroso para flujo MHD Couette-Poiseuille con succión e inyección. Fuente: [29].

1.4. Aplicaciones Prácticas de Nanofluidos en Sistemas Energéticos

En los últimos años, se han estado estudiando el diseño y la optimización de sistemas magnetohidrodinámicos (MHD) que emplean nanofluidos en microcanales porosos para mejorar la eficiencia energética. Estos sistemas se busca determinar los factores que contribuyen a la generación de entropía para minimizarla y así maximizar el trabajo disponible, lo que conduce a un mejor rendimiento y uso más eficiente de la energía. Los nanofluidos en microcanales han ganado mucha atención, ya que la conductividad térmica efectiva de los fluidos convencionales, como el agua, aumenta notablemente con la adición de partículas metálicas a nanoescala con alta conductividad térmica. Esto promete muchas aplicaciones como el diseño de sistemas de refrigeración para dispositivos microelectrónicos o el diseño de diversos sistemas electromecánicos a microescala, como microbombas MHD, microturbinas, etc. [30].

Como primer ejemplo de esto tenemos el artículo de Ibáñez et al. [31], publicado en 2016. En él se aplica el método de minimización de la generación de entropía en un flujo viscoso de nanofluidos eléctricamente conductor, en un microcanal poroso MHD de placas permeables con deslizamiento hidrodinámico y radiación térmica. Además de los efectos de radiación y deslizamiento, también se toman en cuenta los efectos combinados de succión/inyección, campo magnético, fracción de volumen de nanopartículas sólidas y condiciones de contorno convectivas sobre el comportamiento térmico del flujo. Se deriva analíticamente el campo de temperatura del fluido considerando el término radiativo y la disipación viscosa en la ecuación de energía. En los resultados se muestra que es posible encontrar valores óptimos del parámetro de radiación, fracción de volumen de nanopartículas, números de Hartmann y Biot que conducen a una tasa mínima de generación de entropía global, consistentes con irreversibilidades mínimas y máxima transferencia de calor. Así como valores óptimos de fracción volumétrica de nanopartículas y fuerza del campo magnético. Además, muestra que los valores óptimos del número de Biot, el número de Reynolds de succión/inyección, el número de Eckert y el flujo de deslizamiento, donde la generación de entropía era mínima, se movieron a valores más altos tanto con la fracción de volumen de nanopartículas como con el parámetro de radiación.

La necesidad de mejorar la transferencia de calor en los sistemas energéticos ha venido tomando fuerza en los últimos años, debido al uso de nanofluidos como fluidos de trabajo en dispositivos térmicos, utilizando diferentes tipos de nanopartículas y fluidos base, se ha mantenido vigente. Ejemplo de esto es Izadi et al. [32], en él se estudia analíticamente la transferencia de calor mediada por nanofluidos mejorada por impacto MHD en un disipador de calor de metal poroso bajo los efectos de un campo magnético, para refrigeración de CPU. Se consideró el modelo

Darcy-Brinkman-Forchheimer para el flujo de nanofluidos a través de medios porosos y el efecto de disipación viscosa para simular el flujo de nanofluido a través de medios porosos bajo un campo magnético, esto para la transferencia de calor. También se estudian algunos parámetros geométricos y de flujo en la velocidad, la temperatura y el número de Nusselt. Se proponen variables de similitud transformando las ecuaciones diferenciales parciales originales a ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que se resuelven numéricamente. Como resultados se presentan observaciones sobre el número de Darcy, que al aumentar conduce a la ampliación de los perfiles de velocidad y el rendimiento de transferencia de calor; el número de Hartman, que al incrementarse provoca una disminución de los perfiles de velocidad; y el que el aumento del número de Eckert conduce al aumento de la temperatura del fluido refrigerante y a la disminución del rendimiento de transferencia de calor.

En la literatura se encuentran algunos trabajos enfocados en los impactos de la incertidumbre en las propiedades termofísicas de los nanofluidos en la producción de entropía y las condiciones óptimas de operación. Por ejemplo, en algunos de estos se trabaja considerando a las nanopartículas con forma esférica y las correlaciones teóricas de las propiedades físicas. Algunos estudios que consideran diferentes formas de nanopartículas, como Ghadikolaei et al. en [33], en donde se investiga sobre las propiedades termofísicas del transporte de nanofluidos híbridos, con dos o más tipos de partículas, en función del factor de forma en el flujo de punto de estancamiento MHD. Se utilizaron tres categorías de formas de nanopartículas denominadas ladrillos, cilindros y plaquetas. Obteniendo como resultado que la aplicación de nanopartículas en forma de plaquetas es más efectiva, para aumentar la transferencia de calor. En [34], Sheikholeslami et al. presentan un análisis de las influencias de la fuerza magnética y la radiación en el transporte de nanofluidos a través de un medio permeable, considerando nanopartículas en forma de plaqueta, esfera, cilindro y ladrillo. Encontrando que la forma de plaqueta tiene el mayor número de Nusselt. Por último, en [35], Benkhedd et al. estudian el rendimiento de transferencia de calor por convección de nanofluidos híbridos en una tubería horizontal, considerando el efecto de nanopartículas con forma esférica, cilíndrica, plaqueta y cuchilla. Se toma en cuenta también la concentración de nanopartículas y el número de Reynolds en el número de Nusselt local y el factor de fricción. Algunos resultados encontrados fueron que la tasa de transferencia de calor más alta para la concentración máxima de volumen de nanopartículas y la mejora del número de Nusselt más considerable, se obtuvieron con nanopartículas con forma de cuchilla; mientras que las nanopartículas de plaqueta proporciona valores elevados del factor de fricción en comparación con las otras formas. En resumen, las formas de nanopartículas exploradas fueron plaquetas, cilíndricas, de pala, de cuchilla y de ladrillo y se evalúa que forma es la que ofrece la mayor mejora en la transferencia de calor, aunque no se considera la segunda ley de la termodinámica.

En otros trabajos como [36] Seyyed et al. realizaron el cálculo de la generación de entropía y se investigaron más los efectos de las nanopartículas con forma esférica, cilíndrica y de plaqueta. Y aunque todo esto ha sido considerado, los efectos de la incertidumbre en las propiedades termofísicas de los nanofluidos y las formas de las nanopartículas sobre las condiciones óptimas de diseño no se consideran. Sin mencionar que la mayoría de estudios resuelven los modelos matemáticos de manera numérica y no analítica.

En [37], Estrada et al. investigan los efectos de diferentes formas de nanopartículas, tales como plaquetas y forma de aspa, y la incertidumbre en las propiedades termofísicas de los nanofluidos sobre las condiciones óptimas de operación del flujo MHD de nanofluido a través de un microcanal horizontal con un medio poroso considerando deslizamiento hidrodinámico, succión/inyección y radiación térmica. Se calcularon soluciones a los campos de velocidad y temperatura, la entropía global y el número de Nusselt. Como resultado se obtuvo que la forma de plaqueta de las nanopartículas fue la más efectiva para alcanzar las condiciones óptimas con el valor mínimo más bajo de la entropía global, mientras que la forma de aspa fue la más efectiva para alcanzar las condiciones óptimas con el valor máximo más alto de transporte de calor.

En el artículo de Habidi et al. [38], se hace un análisis termodinámico del flujo Couette-Poiseuille MHD de nanofluidos a base de agua en un canal giratorio con radiación, y añadiendo como extra al efecto Hall. Se obtuvieron observaciones interesantes como que la generación de entropía debido a la transferencia de calor y masa es dominante en la superficie inferior. Además, la tasa total de generación de entropía en la superficie inferior aumenta con los parámetros de variación de la viscosidad, la rotación y el campo magnético. También se ha descubierto que la tasa de generación de entropía debido a la fricción en la superficie inferior es mayor que en la superficie superior. Las ecuaciones de gobierno adimensionales se resolvieron numéricamente utilizando un esquema de integración Runge-Kutta-Fehlberg con el método de disparo.

En el trabajo de Ibáñez et al. [31] se lleva a cabo la optimización del flujo MHD de un nanofluido en un microcanal poroso utilizando el método de minimización de generación de entropía (EGM) y considerando los efectos combinados de flujo de deslizamiento, succión/inyección, radiación térmica y transferencia de calor por convección. Contrario a otros trabajos [39, 40] en donde aunque se calcula la generación de entropía, no se toman en cuenta todos los demás efectos combinados. Como resultado se obtienen soluciones analíticas en forma cerrada de las ecuaciones de momento y energía. En la figura 1.4 podemos ver el esquema del experimento.

En el artículo [41], generación de entropía en flujo MHD y transferencia de calor por convección en un medio poroso de superficie que se estira exponencialmente saturada por nanofluidos y sujeta a radiación térmica. Shit et al. hallaron que el efecto de la radiación térmica conduce a la disminución del espesor de la capa límite de momento y al aumento del espesor de la capa

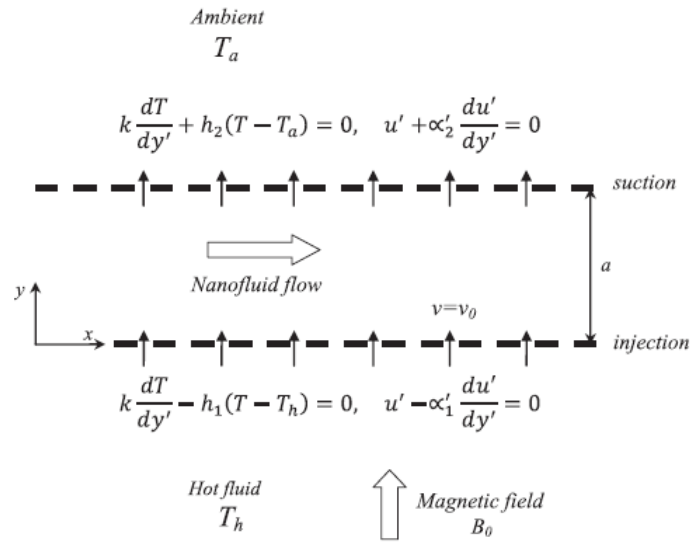


Figura 1.4: Configuración geométrica del microcanal poroso MHD con deslizamiento y succión/inyección. Fuente: [31].

límite térmica, y que la permeabilidad porosa del nanofluido reduce el espesor de la capa límite de momento. En estos últimos trabajos se ha tomado en consideración el análisis de la segunda ley de la termodinámica.

En el estudio realizado por Ibáñez et al. en [42] se estudia la optimización de MHD en un microcanal vertical con un medio poroso, flujo de deslizamiento, tomando en cuenta simultáneamente las condiciones de contorno convectivas-radiactivas combinadas y el flujo de calor por radiación no lineal para el problema de transferencia de calor, además de la búsqueda de valores óptimos. Similar a lo que pasa en el microcanal horizontal, la placa de inyección se mantiene en reposo mientras la placa de succión se mueve hacia arriba/abajo. También se buscó explorar los efectos del medio poroso, el flujo de calor radiativo no lineal, el deslizamiento hidrodinámico, la transferencia de calor convectiva-radiativa conjugada a través de los límites, la fracción de volumen de nanopartículas y el parámetro de radiación en el medio poroso, el comportamiento dinámico y térmico del flujo de nanofluidos MHD simultáneamente. También se estudian las influencias tanto del número de Darcy como del coeficiente de Forchheimer. Y se buscan valores de número de Grashof, el parámetro de radiación de conducción, la longitud de deslizamiento y la fracción de volumen de nanopartículas en los que la entropía y la transferencia de calor alcanzan valores extremos. El experimento se dispone de la siguiente manera.

En el artículo [39], Martín et al. estudian la minimización de la generación de entropía en el flujo de nanofluidos en un canal MHD considerando el efecto de la radiación térmica. Uno de los resultados obtenidos fue que la minimización de la entropía se produce cuando ambas placas están casi a la misma temperatura. Cuando este mismo valor de temperatura es más alto, el valor

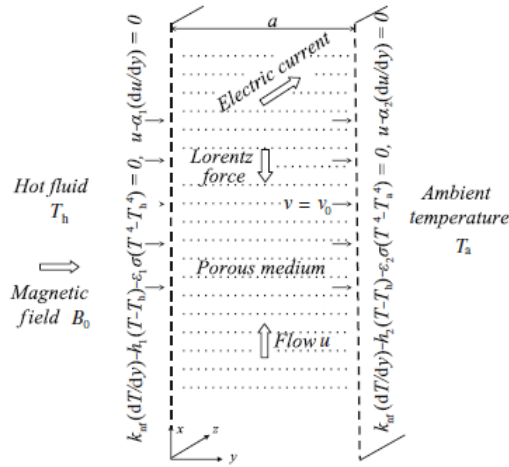


Figura 1.5: Microcanal vertical MHD con deslizamiento, medio poroso y transferencia radiativa. Fuente: [42].

mínimo de entropía.

En [43], Alizadeh et al. investigaron la convección mixta y las irreversibilidades termodinámicas en flujos de punto de estancamiento de nanofluidos MHD sobre un cilindro incrustado en un medio poroso. Se descubrió que la generación de entropía aumenta sustancialmente a valores altos del parámetro de convección mixta, lo que significa que la convección libre en la configuración investigada implica mucha más irreversibilidad en comparación con la convección mixta y forzada. También se argumentó que la proporción de irreversibilidad viscosa en la generación de entropía bajo convección libre es significativamente mayor que la de irreversibilidad térmica.

En [44], Zhang et al. analizan la transferencia de calor por radiación y flujo MHD de nanofluidos en medios porosos con flujo de calor superficial variable y su reacción química. Obtienen resultados interesantes, uno ellos son que los campos de velocidad y temperatura del fluido se ven afectados fuertemente por los tipos de nanopartículas, el campo magnético y la radiación. En este trabajo se consideraron los efectos de la radiación térmica, pero no se calculó la generación de entropía.

De varios estudios ya mencionados es bien sabido que para poder diseñar un dispositivo térmico de eliminación de calor, es inherente minimizar la generación de entropía y la destrucción del trabajo disponible debido a la transferencia de calor y la fricción del fluido. Lo que presenta este trabajo es un análisis de la generación de entropía a través de la primera y segunda ley de la termodinámica con respecto a la irreversibilidad inherente en un flujo y transferencia de calor a través del microcanal bajo las condiciones antes mencionadas. Esto proporciona una herramienta útil para identificar las irreversibilidades, así como para determinar las condiciones óptimas.

Lo nuevo aquí es estudiar los efectos del gradiente de presión simultáneo (favorable/adverso) y el movimiento de una placa, ya sea en dirección ascendente o descendente. Los estudios que serán de principal interés y en los que se basará el presente estudio son donde el análisis se sustenta en cuatro ecuaciones principales, la ecuación de continuidad, ecuación de momento, ecuación de energía y la ecuación de concentración. Añadido a esto, el microcanal será puesto como en la referencia de Gómez et al. [45] en posición inclinada para su estudio, como en la figura 3.2.

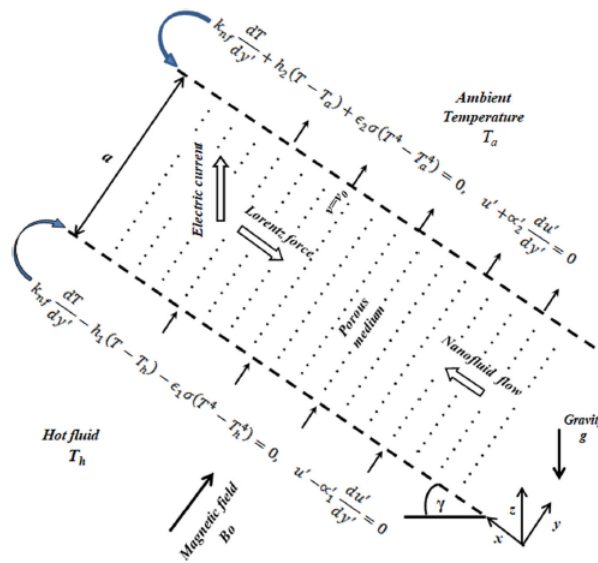


Figura 1.6: Esquema del microcanal inclinado con medio poroso y flujo MHD bajo gradiente de presión. Fuente: [45].

1.5. Influencia de Factores Físicos y Químicos en Flujos de Nanofluidos

Como hemos visto anteriormente, el interés en el estudio de los flujos MHD ha ido teniendo un crecimiento considerable debido a sus importantes aplicaciones físicas a distintas áreas de la ingeniería, la ciencia y la tecnología. También hemos visto que algunos de estos flujos de fluidos han sido estudiados a través de medios porosos. En esta sección haremos la revisión de distintos trabajos que toman en cuenta también factores físicos y químicos del sistema.

En un trabajo un poco reciente, [46]. Venkateswarlu et al. investigan analíticamente las características de transferencia de calor y masa con la condición de deslizamiento en el flujo radiativo MHD de un fluido viscoso en un canal de placas porosas paralelas lleno de medio poroso saturado, en presencia de absorción de calor y reacción química. Aquí se hacen consideraciones

químicas y se involucran nuevos parámetros tales como el número de Grashof térmico y el número de Grashof solutal. El primero significa la fuerza relativa de la fuerza de flotabilidad térmica a la fuerza hidrodinámica viscosa en la capa límite y el otro describe la fuerza relativa de la fuerza de flotabilidad de las especies a la fuerza hidrodinámica viscosa en la misma capa límite. También se considera el número de Schmidt, que significa la fuerza relativa de la viscosidad a la difusividad molecular química, y el número de Prandtl, que define la relación entre la difusividad del momento y la difusividad térmica. Algunos resultados importantes con base en estos parámetros nuevos y otros conocidos fueron que, el gradiente de presión, el número de Grashof solutal, el número de Grashof térmico y el parámetro de Darcy tienden a acelerar la velocidad del fluido y al coeficiente de fricción superficial. Por otro lado, el parámetro de reacción química, el parámetro de absorción de calor, el parámetro magnético, el parámetro de radiación, el número de Schmidt y el número de Prandtl tienen un efecto inverso en la fricción superficial y también sobre la velocidad del fluido. Es un experimento similar a los presentados en la sección anterior, se puede ver en la figura 1.7

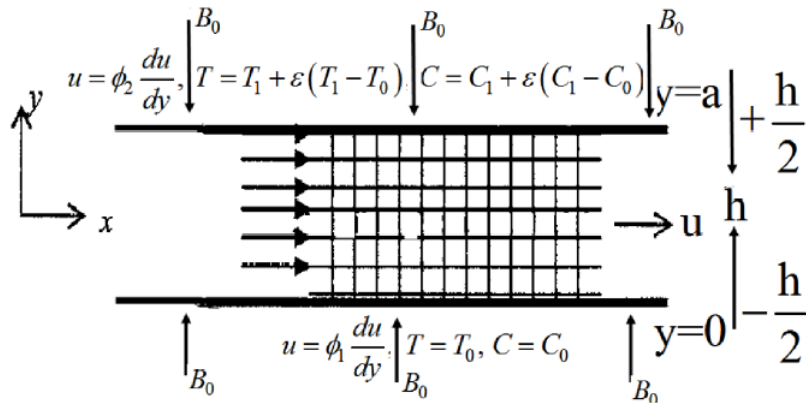


Figura 1.7: Canal de placas paralelas con medio poroso para flujo radiativo MHD. Fuente: [46].

En [47] Hayat et al. tienen una investigación similar a las ya presentadas, solo que se hace sobre una lámina en vez de un canal. En el artículo se presentan los resultados de reacciones homogéneas y heterogéneas en flujo Darcy-Forchheimer con radiación térmica no lineal y condición convectiva sobre una lámina de estiramiento no lineal con espesor variable. También se toman en cuenta el campo magnético y la generación/absorción de calor, ambas no uniformes. Se indaga en los valores de el número de Hartman, el parámetro de radiación, el número de Biot, el número de Prandtl, el parámetro de generación de calor, el parámetro de reacción homogénea-heterogénea, entre otros. Obteniendo que la tasa de transferencia de calor aumenta con valores más altos del número de Prandtl y se controla con valores más altos de la variable de radiación. De igual manera, se encontró que el coeficiente de fricción superficial

aumenta para valores más altos de la variable de espesor. Otro ejemplo, de estudio de reacciones homogéneas-heterogéneas es [48], en él Hayat et al. presentan un estudio sobre los efectos convectivos y homogéneos/heterogéneos en el flujo de nanofluidos a través de un espacio poroso debido a un cilindro utilizando nanotubos de carbono de pared simple y múltiple, con condiciones convectivas y reacciones heterogéneas-homogéneas. Como resultados destacables se tienen que los perfiles de temperatura y concentración disminuyen cerca de la superficie del cilindro, mientras que aumentan lejos de esta. También, la velocidad del fluido decrece cerca del cilindro a medida que el parámetro de curvatura se incrementa, esto no es así lejos del cilindro.

A partir de acá haremos la revisión de artículos que investigan sobre el movimiento browniano y la termoforesis, empezando con los que no consideran un flujo MHD. Como primera revisión tenemos a Ramzan et al. con [49], donde se expone soluciones óptimas para el flujo de capa límite convectivo mixto de nanofluido viscoelástico sobre una superficie vertical de estiramiento en un medio poroso con efectos de difusión térmica (Dufour) y termodifusión (Soret), afectada por movimientos brownianos y de termoforesis. Se obtiene un sistema altamente no lineal de ecuaciones diferenciales obtenidas a partir de ecuaciones diferenciales parciales de capa límite, para solucionarlo se usa el método de análisis de homotopía óptimo (OHAM). Se dan expresiones para parámetros como el número de Prandtl, número de Lewis, el parámetro de flotabilidad de concentración adimensional constante, el parámetro de convección mixta adimensional, el parámetro de porosidad adimensional, entre otros que cuantifican los efectos que se toman en cuenta, mencionados arriba. También toma en cuenta y da expresiones para el coeficiente de fricción superficial, el número de Nusselt y Sherwood locales. Algunos de los resultados obtenidos fueron que el parámetro de movimiento browniano y el número de Dufour tienen una influencia opuesta en los perfiles de temperatura y concentración. Mientras que los números de Prandtl y Lewis tienen efectos similares en los mismos perfiles. Además, el número de Sherwood local disminuye para valores más altos del parámetro de termoforesis y aumenta para valores más altos del parámetro de movimiento browniano.

En [50], Dhlamini et al. presenta. un estudio teórico sobre los efectos de la energía de activación, la reacción química binaria, el movimiento browniano, la termoforesis, la disipación viscosa en la velocidad y la concentración de especies químicas en un flujo de nanofluidos inestables convectivos mixtos con condiciones convectivas en la capa límite. En el desarrollo se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden que se resuelven numéricamente utilizando el método de cuasi-linealización espectral. Como observaciones se obtuvieron que la energía de activación y los parámetros de termoforesis aumentan la concentración de las especies químicas en la capa límite, mientras que el movimiento browniano y la constante de reacción química reducen la concentración de las especies químicas en la misma

región.

Kalaivanan et al [51] investigaron sobre la transferencia de calor y masa del flujo de deslizamiento de nanofluidos no newtonianos de segundo grado con energía de activación de Arrhenius, deformación elástica y radiación térmica no lineal, con control activo y pasivo de nanomateriales. Se toman en cuenta también el movimiento browniano y la termoforesis. Resuelve las ecuaciones que rigen el modelo con Runge-Kutta de orden cuatro y métodos de shooting. Contrario a los artículos hasta ahora en esta sección, aquí se encuentra que los efectos de los parámetros de termoforesis y movimiento browniano no juegan un papel tan importante, ya que son insignificantes en el perfil de concentración cerca de la pared en el control activo de nanopartícula. También se encuentra que el número de Nusselt local es una función decreciente del parámetro de deformación elástica y una función creciente del parámetro de energía de activación adimensional.

Pasamos ahora con los que consideran también un flujo MHD. Empezando con [52] y [53]. En el primero Alshomrani et al. estudian las características de transferencia de calor y masa en el flujo de nanofluido cruzado MHD bidimensional no newtoniano con tasas de transporte de calor y masa que tienen energía de activación, microorganismos móviles y bioconvección, a través de una geometría de cuña y con múltiples condiciones de deslizamiento. Se consideran las características de los microorganismos móviles, la fuente/sumidero de calor no lineal y la energía de activación. Los microorganismos son usados para controlar la suspensión de nanomateriales. Los autores concluyen que el modelo matemático es más útil en el campo de la nanotecnología, la ingeniería eléctrica y mecánica, la biotecnología, los biocombustibles, la microbiología; y que se puede ampliar considerando condiciones de contorno convectivas, reacciones homogéneas-heterogéneas, radiación térmica no lineal, etc. En el segundo artículo de Kefayati et al, se estudia también la generación de entropía de un nanofluido MHD no newtoniano, pero utilizando el modelo matemático de Buongiorno en una cavidad en presencia de un campo magnético uniforme por el método de Boltzmann de red de diferencias finitas (FDLBM). Se estudian el número de Prandtl, Hartmann, Rayleigh, Lewis. No se toma en cuenta la generación de calor, reacciones químicas ni radiación térmica; tampoco la disipación viscosa y el calentamiento Joule. Un hallazgo destacable es que el aumento de los parámetros de termoforesis y movimiento browniano mejora la transferencia de masa y disminuye significativamente la transferencia de calor, mejorando la irreversibilidad total.

En [54], Kalpana et al. exploran teóricamente las características del flujo MHD de nanofluidos híbridos en una pared ondulada con termoforesis y movimiento browniano, bajo el impacto del campo magnético. Se hace un análisis del movimiento de las nanopartículas a través del movimiento browniano y el efecto de la termoforesis y se construye el modelo de flujo con

ecuaciones diferenciales parciales no lineales adimensionales que se resuelven utilizando la técnica de cuasilinealización y el algoritmo de Thomas. Se encuentra que los efectos de la termoforesis y el movimiento browniano ayudan en la reducción en el factor de fricción cerca de la pared ondulada y de mejorar el campo de temperatura.

Como última revisión en esta sección de trabajos que aún no incluyen consideraciones químicas, está Sayehvand et al. [55], en él se investiga numéricamente la termoforesis y los efectos del movimiento browniano en el flujo de nanofluidos MHD y la transferencia de calor y masa entre dos placas paralelas horizontales parcialmente llenas de un medio poroso, en presencia de un campo magnético uniforme. El análisis se lleva a cabo bajo un enfoque iterativo computacional conocido como método de linealización local espectral (SLLM). Se examinan las influencias de varios parámetros físicos tales como la temperatura, concentración, el movimiento browniano, la viscosidad, la termoforesis, el número de Darcy, el número de Schmidt, el número de Prandtl y el número de Hartmann. En sus resultados se puede encontrar que el número de Nusselt aumenta con el aumento del parámetro de viscosidad y el número de Prandtl, mientras que disminuye con un aumento del parámetro termoforético y el browniano. Otras investigaciones de interés que excluyen reacciones químicas son [56–58]

Por último, revisaremos algunos artículos que sí toman en cuenta las reacciones químicas. como primera revisión tenemos Shagaiya et al. [59], con un análisis de entropía en flujo de convección mixta MHD eléctrico inestable de nanofluido bajo los efectos combinados de un campo eléctrico, campo magnético, radiación térmica, disipación viscosa, reacción química, movimiento browniano y termoforesis. Se calculan la velocidad, temperatura, concentración de nanopartículas, generación de entropía y número de Bejan. algunos resultados fueron que el campo de temperatura es sensible a un aumento en la radiación térmica y que para valores más altos de reacción química se tiene una reducción en la concentración. En [60] Irfan et al. estudian algo similar que incluye radiación térmica y convección mixta, pero esta vez no lineal, en el flujo radiativo químicamente reactivo de nanofluidos de Carreau 3D. Se analiza también la reacción química binaria con energía de activación de Arrhenius y condiciones convectivas provenientes de los fenómenos de transporte de calor y masa. El estudio informó que en el campo de temperatura, la radiación y el parámetro de movimiento browniano presentan un rendimiento análogo y aumentan la temperatura del fluido de Carreau. Además, se está estableciendo un aumento del rendimiento para los parámetros de energía de activación y termofosis. Otro ejemplo más de uso de radiación térmica y campo magnético con reacciones químicas puede ser consultado en [61].

También en [62], Reddy et al. estudian la reacción química binaria con energía de activación de Arrhenius, pero bajo el efecto de radiación térmica no lineal en el flujo MHD tridimensional

estacionario del nanofluido de Eyring-Powell sobre una lámina esbelta y estirable con deslizamientos de velocidad y térmicos. Para las ecuaciones diferenciales se usó transformaciones de similitud adecuadas y el método Runge-Kutta y shooting. SE examinan los efectos de las variaciones de diversos parámetros en la velocidad, temperatura, concentración, gradiente de temperatura y gradiente de concentración. Un resultado destacable es que el perfil de temperatura mejora de manera efectiva con la radiación no lineal en comparación con la radiación lineal.

En la investigación de Prasannakumara et al. [63] también se han usado láminas de estiramientos, con la diferencia que se considera una lámina de estiramiento no lineal para analizar el flujo MHD de nanofluido Sisko bajo la influencia de reacción química, la radiación térmica lineal y no lineal. En el documento se emplea un método de cuarto-quinto orden de Runge-Kutta-Fehlberg junto con la técnica de shooting para resolver las ecuaciones. Se estudian los parámetros de radiación, relación de temperatura, magnético, browniano, termoforesis, fluido de Sisko y el número de Prandtl. Los hallazgos fueron que los valores del coeficiente de fricción superficial son mayores para la lámina de estiramiento lineal en comparación con la lámina de estiramiento no lineal. Contrario a esto, los valores de los números de Nusselt y Sherwood son altos en el caso de láminas de estiramiento no lineal en comparación con la lámina de estiramiento lineal. Al igual que en la revisión previa, se observó que la radiación térmica no lineal tiene más influencia en los perfiles de temperatura que los lineales, destacando que la radiación térmica no lineal es más efectiva que la lineal.

Como último antecedente de este capítulo citamos a Ramzan et al. [64], al igual que en los últimos trabajos revisados se incluye reacción química y radiación térmica no lineal, añadiendo la disipación viscosa y los efectos de calentamiento Joule, para estudiar el flujo de nanofluidos MHD biconvectivo con microorganismos girotácticos móviles. También se tienen en cuenta las condiciones de contorno convectivas y de deslizamiento. Las ecuaciones diferenciales también resuelven numéricamente utilizando la técnica de cuarto y quinto orden de Runge-Kutta-Fehlberg. Se evaluaron diversos parámetros sobre flujo, transferencia de calor y densidad móvil de microorganismos. Se observó que la densidad móvil de microorganismos muestra una disminución para valores crecientes del número de Lewis.

1.6. Problemática

Los sistemas de transferencia y conversión de energía que operan bajo condiciones de flujo magnetohidrodinámico (MHD) con nanofluidos híbridos presentan altos niveles de irreversibilidad térmica, reflejados en una elevada producción de entropía. Este problema se agrava en

configuraciones complejas como canales inclinados con efectos de deslizamiento, generación interna de calor, medio poroso, y fenómenos termofísicos como el movimiento browniano y la termoforesis. Actualmente, no se cuenta con modelos suficientemente detallados que permitan identificar con precisión las condiciones que minimicen dichas irreversibilidades. Esta falta de conocimiento limita el diseño de sistemas más eficientes desde el punto de vista exergético.

1.7. Objetivos

1.7.1. Objetivo General

Desarrollar un modelo matemático que permita optimizar el comportamiento térmico de un flujo MHD de nanofluido híbrido en un canal inclinado, mediante la minimización de la producción de entropía. Considerando los efectos del deslizamiento en las paredes, la generación interna de calor, la radiación térmica no lineal, un medio poroso, el movimiento browniano y la termoforesis.

1.7.2. Objetivos Particulares

- 1. Determinar el comportamiento dinámico del sistema.
 - (a) Determinación de la expresión particular de la ecuación de balance de momento tomando en cuenta las consideraciones del sistema.
 - (b) Solución de la ecuación de balance de momento con condiciones de frontera de deslizamiento en las paredes.
 - (c) Análisis de los resultados obtenidos del comportamiento dinámico del sistema.
- 2. Determinar el comportamiento térmico del sistema.
 - (a) Determinación de la expresión particular de la ecuación de balance de energía tomando en cuenta las consideraciones del sistema.
 - (b) Solución de la ecuación de balance de energía con condiciones térmicas de tercer tipo.
 - (c) Análisis de los resultados obtenidos del comportamiento térmico del sistema.
- 3. Determinar el comportamiento de difusión de masa en el sistema.
 - (a) Determinación de la expresión particular de la ecuación de difusión de masa tomando en cuenta las consideraciones del sistema.

- (b) Solución de la ecuación con valor de concentración constante en las fronteras del sistema.
- (c) Análisis de los resultados obtenidos del comportamiento de difusión de masa del sistema.
- **4.** Determinar la producción de entropía en el sistema.
 - (a) Determinación de la expresión explícita de entropía local del sistema que considere todos los términos disipativos del sistema.
 - (b) Integración de la expresión local de entropía sobre todo el volumen del sistema para obtener la entropía global del sistema.
 - (c) Análisis de resultados para la obtención de condiciones óptimas de operación del sistema donde las pérdidas de energía útil sean mínimas determinando un conjunto de valores de parámetros de diseño del sistema que conducen a un mínimo de entropía y dentro de los cuales se incluyen parámetros geométricos y propiedades físicas de materiales.
- **5.** Evaluar la transferencia de calor interna, comportamiento hidráulico y transferencia de masa global del sistema.
 - (a) Evaluación de la transferencia de calor interna del sistema a través de la determinación del número de Nusselt.
 - (b) Evaluación del comportamiento hidráulico del sistema a través de la determinación del coeficiente de fricción de pared (skin friction).
 - (c) Evaluación de la transferencia de masa global sistema a través de la determinación del número de Sherwood.
 - (d) Obtención de condiciones óptimas de operación del sistema donde la transferencia de calor, comportamiento hidráulico y transferencia de masa sea máxima o mínima.

1.8. Justificación

La minimización de la producción de entropía es una estrategia fundamental para la optimización de sistemas térmicos con irreversibilidades, ya que permite reducir las pérdidas de energía útil y, en consecuencia, incrementar la eficiencia exergética. En este contexto, el análisis de un flujo MHD de un nanofluido híbrido en un canal inclinado cobra especial relevancia debido a su aplicabilidad en tecnologías emergentes de conversión y gestión de calor. La incorporación

de fenómenos como la generación interna de calor, el deslizamiento en las paredes, la radiación térmica no lineal, el medio poroso, el movimiento browniano y la termoforesis permite una descripción realista del sistema. Este estudio contribuirá a identificar configuraciones que permitan operar con mínima producción de entropía, lo cual representa un avance en el diseño de dispositivos energéticamente eficientes.

1.9. Conclusión

En este capítulo se han revisado los fundamentos de la termodinámica clásica y su evolución hacia la termodinámica de procesos irreversibles, destacando su relevancia en el análisis de sistemas térmicos y flujos magnetohidrodinámicos. Se ha enfatizado la importancia de la producción de entropía como un indicador clave de las ineficiencias en los sistemas térmicos y su relación directa con la eficiencia exergética.

Además, se han abordado las aplicaciones de los nanofluidos en sistemas energéticos, subrayando su capacidad para mejorar la transferencia de calor y minimizar las pérdidas energéticas. También se han identificado diversos factores físicos y químicos que afectan el comportamiento de los flujos MHD de nanofluidos, lo que constituye un punto de partida esencial para el análisis detallado que se desarrollará en los capítulos siguientes. Este marco teórico y conceptual proporciona la base necesaria para la formulación y optimización del modelo que busca minimizar la producción de entropía y maximizar la eficiencia de los sistemas térmicos.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Introducción

El presente capítulo tiene como objetivo establecer los fundamentos teóricos que sustentan el estudio del flujo magnetohidrodinámico (MHD) de un nanofluido híbrido en un canal inclinado, en condiciones donde se consideran fenómenos como la generación interna de calor, la radiación térmica, los efectos de succión e inyección en las paredes, y mecanismos de transporte asociados al movimiento browniano y la termoforesis. Para ello, se aborda una revisión sistemática de los conceptos y ecuaciones claves provenientes de la termodinámica clásica e irreversible, la mecánica de fluidos, la teoría electromagnética y la física de nanofluidos.

Se inicia con una revisión de la segunda ley de la termodinámica, con énfasis en la definición de entropía como medida de irreversibilidad, para luego introducir la termodinámica irreversible lineal como el marco conceptual apropiado para cuantificar la producción de entropía en sistemas fuera del equilibrio. Posteriormente, se desarrollan las ecuaciones de conservación que rigen el comportamiento de masa, momento, energía y concentración en flujos de medios continuos.

La discusión se complementa con la descripción detallada de las propiedades termofísicas de los nanofluidos híbridos, incluyendo los modelos matemáticos empleados para caracterizar su densidad, viscosidad, conductividad térmica, capacidad calorífica, coeficiente de expansión térmica y conductividad eléctrica. Finalmente, se presenta la teoría fundamental de la magnetohidrodinámica, estableciendo las ecuaciones que gobiernan el acoplamiento entre campos electromagnéticos y dinámicas de flujo en medios conductores, así como su influencia en la generación de entropía.

2.2. Segunda ley de la termodinámica y entropía

La segunda ley de la termodinámica es una generalización de los experimentos de Carnot con máquinas de vapor y del reconocimiento de que era imposible convertir completamente todo el calor de un sistema de este tipo en trabajo [65, 66]. Su enunciado formal puede expresarse como: Es imposible que cualquier sistema pase por un proceso en el que absorba calor de un depósito a una sola temperatura y lo convierta completamente en trabajo mecánico, al tiempo que termina en el mismo estado en el que comenzó [67]. Pero, estas son las dos afirmaciones más comunes:

Enunciado de Clausius. No es posible ningún proceso cuyo único resultado sea la transferencia de calor de un cuerpo más frío a uno más caliente.

Enunciado de Kelvin. No es posible ningún proceso cuyo único resultado sea la conversión completa del calor en trabajo.

Básicamente, la segunda ley señala que el trabajo puede disiparse en calor, mientras que el calor no puede convertirse completamente en trabajo, lo que demuestra la existencia de irreversibilidad en la naturaleza. A través de esto se define una variable termodinámica conocida como entropía [68]. La entropía es una medida cuantitativa de irreversibilidad y a través de ella se puede expresar la segunda ley. Clausius descubrió que para cualquier proceso cíclico:

$$\oint \frac{d'Q}{T} \leq 0 \quad (2.1)$$

donde $\oint$ representa la integral realizada sobre todo un ciclo y $d'Q$ es la cantidad de calor intercambiada ente el sistema y la fuente a la temperatura T . La igualdad se cumple solo para procesos reversibles y en ese caso T es indistintamente la temperatura del sistema o la fuente.

2.3. Termodinámica Irreversible Lineal

La Termodinámica Irreversible Lineal (TIL) es una teoría fenomenológica que extiende la termodinámica clásica hacia el estudio de procesos irreversibles, los cuales son comunes en sistemas reales alejados del equilibrio. Mientras que la termodinámica clásica solo permite determinar la dirección de los procesos y asume condiciones cuasiestáticas y reversibles, la TIL proporciona un marco matemático y físico más robusto para cuantificar la generación de entropía y otros efectos disipativos en sistemas donde hay transporte de masa, calor, cantidad de movimiento y carga eléctrica [8, 11, 69].

En este contexto, la TIL considera a los sistemas como medios continuos, tratando las variables de estado como funciones del espacio y el tiempo. Esto permite formular ecuaciones locales que relacionan explícitamente la evolución temporal de las cantidades conservadas masa, momento y energía con la producción de entropía, mediante el uso de ecuaciones constitutivas [16].

Uno de los principios clave de esta teoría es el postulado de equilibrio local, el cual establece que, aunque el sistema esté fuera de equilibrio global, cada elemento de volumen puede considerarse en equilibrio interno. Esto permite definir propiedades termodinámicas locales (como temperatura, presión, densidad, etc.) como funciones del tiempo y la posición, y utilizar relaciones similares a las del equilibrio para describir el comportamiento del sistema.

A partir del balance de energía interna y utilizando la relación de Gibbs, se obtiene una ecuación para la evolución de la entropía, que incluye dos términos: uno que representa el flujo de entropía hacia dentro o fuera del volumen de control, y otro que representa una fuente interna de entropía debida a los procesos irreversibles:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \dot{S}, \quad (2.2)$$

donde ρ es la densidad de masa, s es la entropía específica, $\mathbf{J}_s$ es el flujo de entropía, y $\dot{S} \geq 0$ es la tasa de producción de entropía por unidad de volumen. La forma explícita de esta última puede expresarse como:

$$\dot{S} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.3)$$

lo que muestra que las irreversibilidades provienen de tres fuentes principales: conducción de calor, disipación viscosa y efectos electromagnéticos.

Un aspecto central en la TIL es la formulación bilineal entre los flujos irreversibles J_i y sus respectivas fuerzas termodinámicas X_i , dada por:

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k, \quad (2.4)$$

donde L_{ik} es la matriz de coeficientes fenomenológicos. Esta expresión representa el tercer postulado de la TIL, el cual afirma que los flujos son funciones lineales de las fuerzas, bajo la condición de perturbaciones suficientemente pequeñas respecto al equilibrio. Además, mediante el teorema de reciprocidad de Onsager, se establece el cuarto postulado: los coeficientes fenomenológicos obedecen la simetría $L_{ik} = L_{ki}$, lo cual ha sido verificado experimentalmente

en una gran variedad de sistemas [8, 14].

La TIL ha demostrado ser especialmente útil para describir flujos disipativos en sistemas con transporte simultáneo de calor, masa y momento, incluyendo aquellos con conducción eléctrica y campos magnéticos, como ocurre en los flujos magnetohidrodinámicos (MHD) [17, 31]. Su aplicabilidad se extiende tanto a sistemas de interés industrial como a problemas complejos de la ciencia de materiales, refrigeración avanzada, y análisis de eficiencia exergética.

2.4. Ecuaciones generales de la mecánica de fluidos

2.4.1. Conservación de la masa

Para un fluido, es posible deducir la ecuación de conservación de masa mediante un volumen de control que se mueve con la velocidad del fluido [70, 71]. El cambio total de masa dentro del volumen de control, puede ser expresado de la siguiente manera

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho_f dV = - \int_S \rho_f (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS. \quad (2.5)$$

Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss al último término de la ecuación anterior

$$- \int_S (\rho_f \vec{v}) \cdot \hat{n} dS = - \int_V \nabla \cdot (\rho_f \vec{v}) dV \quad (2.6)$$

Por lo que usando este resultado e introduciendo la derivada temporal a la integral de volumen en la ecuación (2.5), se obtiene que

$$\int_V \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho_f \vec{v}) dV, \quad (2.7)$$

entonces

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (2.8)$$

y ya que el volumen de control es arbitrario,

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \vec{v}) = 0. \quad (2.9)$$

Esta es la ya conocida ecuación de continuidad.

2.4.2. Conservación del momento lineal

En el estudio de medios continuos, en particular en los fluidos, existe también la conservación del momento lineal. Para derivar las ecuaciones de momento lineal, utilizamos la segunda ley del movimiento de Newton (el principio de conservación del momento). La consideración que hace la segunda ley de Newton es la siguiente: la suma de las fuerzas sobre una partícula es igual a la rapidez de variación de su momentum lineal. Esta ley relaciona la suma vectorial de las Fuerzas que actúan sobre la tasa de cambio del momento de un volumen de fluido V [72].

Entonces, el volumen V está formado por una determinada cantidad de materia que se mueve junto con el fluido y permanece dentro de V [73]:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V \rho_f \vec{v} \cdot dV \right] = \int_V \rho_f \vec{f} \cdot dV + \int_S \overleftrightarrow{\mathbf{P}} \cdot \vec{n} dS \quad (2.10)$$

donde dV es la diferencial de volumen de una pequeña porción de material, dS es el elemento de la superficie cerrada S que encierra a V y $\overleftrightarrow{\mathbf{P}}$ es el tensor de todas las fuerzas que actúan sobre dS . $\vec{f}$ representa la fuerza volumétrica que puede ser dada por una fuerza gravitacional, una fuerza magnética sobre un ferrofluido, etc.

Tomando el segundo término de la derecha de la ecuación anterior y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss, se tiene:

$$\int_S P_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (2.11)$$

con esto podemos expresar a (2.10) como:

$$\int_V \rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dV = \int_V \rho_f \vec{f} \cdot dV + \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}} dV \quad (2.12)$$

con $\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}}$. Por lo tanto, la ecuación local de movimiento para una partícula del fluido es:

$$\rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_f \vec{f} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{P}} \quad (2.13)$$

Ahora, si separamos de $\overleftrightarrow{\mathbf{P}}$ la parte debida a la presión de la parte debida a las fuerzas de viscosidad, usando $P_{ij} = P'_{ij} - p\delta_{ij}$, se tiene:

$$(\nabla \cdot \overleftrightarrow{P})_i = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial P'_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial (p\delta_{ij})}{\partial x_j} = (\nabla \cdot \overleftrightarrow{P}')_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2.14)$$

Por lo que (2.13) se convierte en

$$\rho_f \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_f \vec{f} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{P}' - \nabla p \quad (2.15)$$

2.4.3. Conservación de la energía

Para un fluido incompresible con o sin viscosidad [74], la ecuación de conservación de energía se puede deducir a partir de la energía cinética por unidad de volumen que se escribe como

$$e_c = \frac{dE_c}{dV} = \frac{\rho_f v^2}{2}. \quad (2.16)$$

A esta expresión la podemos derivar respecto al tiempo obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_f v^2}{2} \right) = \rho_f \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho_f v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Retomando la ecuación (2.15) remplazando $\frac{d\vec{v}}{dt}$ por $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$, así

$$\rho_f \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial P'_{ij}}{\partial x_j} + \rho_f f_i. \quad (2.18)$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior (2.17) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_f v^2}{2} \right) = -\rho_f v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial P'_{ij}}{\partial x_j} + \rho_f v_i f_i \quad (2.19)$$

$$= -v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\rho_f v^2}{2} \right) - v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i P'_{ij}) - P'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho_f v_i f_i \quad (2.20)$$

$$= -\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_f v^2}{2} + p \right) + \nabla \cdot (\overleftrightarrow{P}' \cdot \vec{v}) - P'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho_f \vec{v} \cdot \vec{f}. \quad (2.21)$$

Observando que

$$-\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\rho_f v^2}{2} + p \right) = \left(\frac{\rho_f v^2}{2} + p \right) \nabla \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \left[\vec{v} \left(\frac{\rho_f v^2}{2} + p \right) \right]. \quad (2.22)$$

Pero $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ debido a la incompresibilidad. Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_f v^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left[\vec{v} \left(\frac{\rho_f v^2}{2} + p \right) - (\overleftrightarrow{P}' \cdot \vec{v}) \right] - \overleftrightarrow{P}' : \nabla \vec{v} + \rho_f \vec{v} \cdot \vec{f}. \quad (2.23)$$

donde $\overleftrightarrow{P}' : \nabla \vec{v} \equiv P'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

2.5. Ecuación de concentración de masa

En el estudio del transporte en sistemas de nanofluidos, además de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, es necesario considerar la evolución de la concentración de especies dispersas, como nanopartículas. La *ecuación de conservación de la concentración de masa* (también llamada ecuación de difusión o de transporte de especie) describe cómo varía espacial y temporalmente la cantidad de una sustancia por unidad de volumen, debido a mecanismos como la convección, la difusión molecular, el efecto termoforesis y las reacciones químicas.

Para un fluido con concentración de especie $C(x, y, t)$, la forma general de la ecuación de transporte de masa, basada en un volumen de control, se expresa como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C\vec{v}) = \nabla \cdot (D\nabla C) + S_C, \quad (2.24)$$

donde $\vec{v}$ es el campo de velocidad del fluido, D es el coeficiente de difusión, y S_C representa una fuente o sumidero que puede deberse a fenómenos como reacciones químicas o efectos termoforéticos.

Bajo la aproximación de capa límite para un flujo bidimensional laminar e incompresible, con transporte difusivo dominante en la dirección transversal y coeficientes efectivos constantes, la ecuación anterior adopta formas particulares reportadas en la literatura. Por ejemplo, en [55, 56] se emplea:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_B \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_T}{T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (2.25)$$

donde D_B es el coeficiente de difusión browniano, D_T es el coeficiente de difusión termoforética, T es la temperatura local y T_∞ es una temperatura de referencia.

Cuando se consideran reacciones químicas de primer orden con energía de activación, puede incorporarse un término fuente tipo Arrhenius. En [50, 60, 62] se utiliza:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_B \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_T}{T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - k_r^2 \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^n e^{-E_a/(kT)} (C - C_\infty), \quad (2.26)$$

donde k_r es la constante de reacción, E_a es la energía de activación, n es un exponente cinético, C_∞ es la concentración ambiental (o de equilibrio) y k es la constante de Boltzmann.

Asimismo, se han reportado modelos donde el coeficiente de difusión depende de la concentración, $D(C)$. Por ejemplo, en [52] se plantea:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[D(C) \frac{\partial C}{\partial y} \right] + \frac{D_T}{T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - k_r^2 \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^n e^{-E_a/(kT)} (C - C_\infty). \quad (2.27)$$

Este tipo de ecuaciones es especialmente útil para modelar flujos de nanofluidos híbridos en microcanales, donde la interacción entre mecanismos de transporte y la química del sistema es compleja. La ecuación de concentración de masa es, por tanto, fundamental para describir con precisión la distribución de partículas en el flujo, y su inclusión resulta imprescindible en el estudio de generación de entropía y transferencia de calor en sistemas con múltiples irreversibilidades.

Aunque existen formulaciones generales del transporte convectivo–difusivo, véase [70], en esta sección se han mostrado tres estructuras típicas empleadas en estudios de nanofluidos: (i) el modelo de convección–difusión con aportes browniano y termoforético, dado por (2.25); (ii) su extensión con término fuente tipo Arrhenius para reacción química de primer orden con energía de activación, ecuación (2.26); y (iii) el caso con difusividad dependiente de la concentración, $D(C)$.

En particular, [55, 56] emplean la forma (2.25) para describir el transporte de nanopartículas en un flujo laminar bidimensional, donde el término browniano D_B y el término termoforético D_T capturan la migración inducida por gradientes de concentración y temperatura, respectivamente.

Por otro lado, [50, 60, 62] incorporan reacción química con energía de activación mediante un término de Arrhenius, como en (2.26). En algunos trabajos se adopta un planteamiento sin variación en x para enfatizar la evolución temporal y/o transversal de la concentración (por ejemplo, con convección dominante en y), mientras que en otros se conserva la forma convectiva completa.

Adicionalmente, existen extensiones tridimensionales del balance de concentración. Por ejemplo, [62] considera una estructura con componentes de velocidad (u, v, w) y difusión transversal en una coordenada normal dominante, lo cual conduce a una ecuación del tipo:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D_B \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{D_T}{T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - k_r^2 \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^n e^{-E_a/(kT)} (C - C_\infty). \quad (2.28)$$

Finalmente, [51, 52] reportan formulaciones en régimen 2D estacionario; en el primer caso se conserva la estructura base (2.25) añadiendo el término de Arrhenius, mientras que en el segundo se permite una difusividad variable, resultando en expresiones del tipo mostrado anteriormente para $D(C)$.

2.6. Nanofluido

Los nanofluidos son suspensiones coloidales formadas por la dispersión de nanopartículas sólidas (con tamaños típicamente entre 1 y 100 nanómetros) en un fluido base convencional, como agua, etilenglicol, aceite o mezclas de estos. Estas mezclas exhiben propiedades termo-físicas mejoradas en comparación con los fluidos puros, especialmente en términos de conductividad térmica, viscosidad y capacidad de transferencia de calor.

El concepto fue introducido por primera vez por Choi y Eastman (1995), y desde entonces ha sido objeto de numerosos estudios debido a su potencial en aplicaciones de ingeniería térmica, como microcanales, intercambiadores de calor, sistemas de refrigeración, energía solar, electrónica de potencia, entre otros [30].

El mejoramiento en las propiedades térmicas de los nanofluidos se debe principalmente a mecanismos como el movimiento browniano de las nanopartículas, el efecto de capa nanométrica alrededor de las partículas, y la reducción de la resistencia térmica interfacial. Estas características hacen de los nanofluidos una alternativa eficiente para el incremento del rendimiento térmico de sistemas de intercambio de calor.

2.6.1. Nanofluido híbrido

Los nanofluidos híbridos representan una evolución de los nanofluidos convencionales, al incorporar dos o más tipos distintos de nanopartículas en la misma base líquida. Esta combinación busca aprovechar las ventajas térmicas de diferentes materiales para lograr un rendimiento superior.

Por ejemplo, se pueden combinar metales (como cobre o plata) con óxidos metálicos (como

Al_2O_3 o TiO_2), o incluso materiales como grafeno o nitruro de boro, buscando una sinergia entre sus propiedades térmicas, eléctricas o reológicas. La fracción volumétrica total del nanofluido híbrido se denota como $\phi = \phi_1 + \phi_2$, donde ϕ_1 y ϕ_2 representan las fracciones volumétricas de cada tipo de nanopartícula.

Estudios recientes han demostrado que los nanofluidos híbridos pueden ofrecer mejoras significativas en la conductividad térmica y en la eficiencia de transferencia de calor, así como una reducción en la producción de entropía bajo ciertas condiciones de flujo [75, 76].

2.6.2. Propiedades termofísicas de los nanofluidos

El estudio de los nanofluidos requiere determinar con precisión sus propiedades termofísicas, las cuales son fundamentales para predecir y modelar su comportamiento en aplicaciones térmicas. Las principales propiedades que se consideran son:

- Densidad (ρ_{nf})
- Capacidad térmica ($(\rho C_p)_{nf}$)
- Viscosidad dinámica (η_{nf})
- Conductividad térmica (k_{nf})
- Coeficiente de expansión térmica (β_{nf})
- Conductividad eléctrica (σ_{nf})

Estas propiedades dependen no sólo de las características individuales del fluido base y de las nanopartículas (densidad, forma, tamaño, conductividad, etc.), sino también de factores como la temperatura, la fracción volumétrica ϕ , la forma de las partículas, la interacción interfacial, y en algunos casos, de la presencia de capas nanométricas estructuradas en torno a las partículas.

En el caso de nanofluidos híbridos, estas propiedades se calculan mediante modelos de mezcla que incorporan las fracciones volumétricas de cada tipo de nanopartícula. Los modelos utilizados han sido desarrollados en base a teorías fenomenológicas, modelos cinéticos o correlaciones experimentales, y han sido aplicados ampliamente en la literatura técnica y científica [75–77].

Las expresiones matemáticas para cada una de estas propiedades se detallan en las siguientes subsecciones, siguiendo los modelos que han demostrado mayor precisión y estabilidad numérica en simulaciones de transferencia de calor y dinámica de fluidos.

Densidad

La densidad efectiva ρ_{nf} de un nanofluido representa la masa total del sistema por unidad de volumen, considerando tanto el fluido base como las nanopartículas suspendidas. Dado que los sólidos presentan mayor densidad que los líquidos, la inclusión de nanopartículas provoca un aumento en la densidad global del fluido. Este efecto es prácticamente lineal respecto a la fracción volumétrica de nanopartículas ϕ .

En la mayoría de los estudios, se ha observado que la densidad aumenta con el incremento de ϕ y que, en general, disminuye levemente con el aumento de la temperatura. El modelo más utilizado para estimar la densidad es el propuesto por Pak y Cho, el cual se basa en una mezcla ponderada entre la densidad del fluido base y la de las partículas sólidas [77]:

$$\frac{\rho_{nf}}{\rho_f} = (1 - \phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad (2.29)$$

donde ρ_f y ρ_s representan la densidad del fluido base y de las nanopartículas, respectivamente.

Siguiendo el enfoque utilizado por Rodolfo en su marco teórico, para un nanofluido híbrido, donde se consideran dos tipos de nanopartículas con fracciones volumétricas ϕ_1 y ϕ_2 , la expresión se generaliza como [75]:

$$\frac{\rho_{hnf}}{\rho_f} = \frac{(1 - \phi)\rho_f + \phi_1\rho_{s1} + \phi_2\rho_{s2}}{\rho_f} \quad (2.30)$$

Esta relación es ampliamente utilizada en la literatura por su simplicidad y porque se adapta bien a simulaciones numéricas en estudios de transferencia de calor y flujo laminar de nanofluidos.

Capacidad térmica

La capacidad térmica del nanofluido, también conocida como calor específico volumétrico $(\rho C_p)_{nf}$, es una propiedad esencial para el análisis de transporte de calor. Representa la cantidad de energía térmica necesaria para elevar la temperatura de una unidad de volumen del nanofluido en una unidad de temperatura.

Esta propiedad depende directamente de las capacidades térmicas del fluido base y de las nanopartículas, así como de la fracción volumétrica de estas últimas. En general, se ha observado que la capacidad térmica disminuye con la incorporación de nanopartículas, especialmente cuando estas tienen menor capacidad calorífica que el fluido base. Además, esta propiedad puede disminuir con el aumento de temperatura [75, 76].

El modelo más comúnmente utilizado para estimar la capacidad térmica de un nanofluido unitario es el de Pak y Cho [77], el cual se expresa como:

$$\frac{(\rho C_p)_{nf}}{(\rho C_p)_f} = (1 - \phi) + \phi \frac{(\rho C_p)_s}{(\rho C_p)_f} \quad (2.31)$$

donde $(\rho C_p)_f$ y $(\rho C_p)_s$ son las capacidades térmicas volumétricas del fluido base y de las nanopartículas, respectivamente.

Para el caso de nanofluidos híbridos, la capacidad térmica volumétrica se evalúa considerando el aporte individual de cada tipo de nanopartícula. La forma extendida de la expresión anterior, basada en los modelos utilizados por Saqib et al. [75], se da como:

$$\frac{(\rho C_p)_{hnf}}{(\rho C_p)_f} = \frac{(1 - \phi)(\rho C_p)_f + \phi_1(\rho C_p)_{s1} + \phi_2(\rho C_p)_{s2}}{(\rho C_p)_f} \quad (2.32)$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son las fracciones volumétricas de las nanopartículas 1 y 2, mientras que $(\rho C_p)_{s1}$ y $(\rho C_p)_{s2}$ representan sus respectivas capacidades térmicas volumétricas.

Este modelo permite una aproximación adecuada para simulaciones numéricas, al capturar los efectos combinados de las diferentes fases en la transferencia de energía térmica.

Viscosidad dinámica

La viscosidad dinámica del nanofluido, denotada por η_{nf} , es una propiedad fundamental que describe la resistencia interna del fluido al flujo. La incorporación de nanopartículas generalmente aumenta la viscosidad del fluido, lo que puede afectar el régimen de flujo, la caída de presión y la eficiencia del sistema térmico.

Diversos factores influyen en esta propiedad, entre ellos: la fracción volumétrica ϕ , la temperatura, el tamaño y la forma de las nanopartículas, así como su distribución. A continuación, se presentan tres modelos empleados comúnmente para estimar la viscosidad dinámica, tanto en nanofluidos simples como híbridos.

1. Modelo de Brinkman

Este modelo es adecuado para bajas concentraciones de nanopartículas esféricas y es ampliamente utilizado en simulaciones numéricas por su simplicidad [78]:

$$\frac{\eta_{nf}}{\eta_f} = \frac{1}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (2.33)$$

Para nanofluidos híbridos con dos tipos de nanopartículas, se generaliza como [75]:

$$\frac{\eta_{hnf}}{\eta_f} = \frac{1}{(1 - \phi_1 - \phi_2)^{2.5}} \quad (2.34)$$

2. Modelo de Einstein–Batchelor

Este modelo incorpora efectos de forma de las nanopartículas mediante los coeficientes empíricos a y b . Es más adecuado para fracciones volumétricas mayores al 1 % y tiene en cuenta efectos de interacción entre partículas [79]:

$$\frac{\eta_{hnf}}{\eta_f} = 1 + a(\phi_1 + \phi_2) + b(\phi_1 + \phi_2)^2 \quad (2.35)$$

Los valores de a y b dependen de la forma de las nanopartículas. Por ejemplo, para partículas esféricas $a = 2.55$ y $b = 6.2$; para placas tipo "blade", $a = 14.6$ y $b = 123.3$ [80].

3. Modelo empírico de Wang et al.

Basado en correlaciones experimentales para un nanofluido de Al_2O_3 en agua, este modelo también ha sido utilizado para estimaciones rápidas en el rango de $\phi < 0.04$ [81]:

$$\frac{\eta_{nf}}{\eta_f} = 1 + 7.3\phi + 123\phi^2 \quad (2.36)$$

Este conjunto de modelos proporciona flexibilidad al usuario para seleccionar el más adecuado dependiendo del tipo de simulación, forma de las nanopartículas y régimen de flujo.

Conductividad térmica

La conductividad térmica del nanofluido, denotada por k_{nf} , mide la capacidad del fluido para conducir calor. Esta propiedad es clave para mejorar el rendimiento térmico en aplicaciones donde la transferencia de calor eficiente es prioritaria. La inclusión de nanopartículas genera un aumento significativo en la conductividad térmica del fluido base debido a mecanismos como el movimiento browniano, la dispersión térmica y la formación de capas nanométricas entre partículas y fluido.

Entre los factores que afectan esta propiedad se encuentran: la fracción volumétrica ϕ , el tipo y material de las nanopartículas, la temperatura, y especialmente la forma de las partículas. A continuación, se presentan tres modelos representativos utilizados para estimar k_{nf} en nanofluidos

híbridos.

1. Modelo de Maxwell (clásico y extendido)

Este modelo es ampliamente utilizado para nanopartículas esféricas en nanofluidos simples. Considera la fracción volumétrica y la diferencia entre conductividad térmica del fluido base y de las partículas sólidas [82]:

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_s + 2k_f - 2\phi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \phi(k_f - k_s)} \quad (2.37)$$

Para el caso híbrido, Farooq et al. [76] y Saqib et al. [75] propusieron una extensión que incluye dos nanopartículas diferentes con fracciones ϕ_1 y ϕ_2 :

$$\frac{k_{hnf}}{k_f} = \frac{\left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) + 2k_f + 2\phi \left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi} + k_f\right)}{\left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) + 2k_f - \phi \left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi} - k_f\right)} \quad (2.38)$$

2. Modelo de Hamilton–Crosser

Este modelo incluye el efecto de la forma de las nanopartículas, representado por un factor geométrico $s = \frac{3}{\psi}$, donde ψ es el coeficiente de esfericidad. Es adecuado para nanopartículas no esféricas, como láminas, cilindros o plaquetas [79, 80]:

$$\frac{k_{hnf}}{k_f} = \frac{(s-1)k_f + \left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) + (s-1)\phi \left(\left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) - k_f\right)}{(s-1)k_f + \left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) - \phi \left(\left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) - k_f\right)} \quad (2.39)$$

Los valores de ψ para diferentes formas de nanopartículas son los siguientes: - Esféricas: $\psi = 1$ - Láminas (blade): $\psi = 0.36$ - Cilíndricas: $\psi = 0.62$ - Ladrillo (brick): $\psi = 0.81$ - Plaquetas: $\psi = 0.52$

Coeficiente de expansión térmica

El coeficiente de expansión térmica del nanofluido, denotado por $(\rho\beta)_{nf}$, representa la variación de volumen del fluido con respecto a un cambio en la temperatura. Esta propiedad es importante en el análisis de flujos con gradientes térmicos, ya que aparece en la formulación del número de Grashof, relacionado con los efectos de flotación térmica en convección natural o combinada.

El coeficiente de expansión térmica depende de la fracción volumétrica de nanopartículas, el

tipo de material y la temperatura del sistema. Se ha observado que la inclusión de nanopartículas reduce el coeficiente de expansión térmica respecto al fluido base, aunque este comportamiento puede variar ligeramente según el tipo de nanopartícula y su interacción con el fluido [79,80].

1. Modelo clásico (Pak y Cho)

El modelo más utilizado en la literatura para calcular el coeficiente de expansión térmica de nanofluidos simples se basa en la combinación ponderada de las propiedades del fluido y las partículas sólidas [77]:

$$\frac{(\rho\beta)_{nf}}{(\rho\beta)_f} = (1 - \phi) + \phi \frac{(\rho\beta)_s}{(\rho\beta)_f} \quad (2.40)$$

donde $(\rho\beta)_f$ y $(\rho\beta)_s$ son los productos de densidad y coeficiente de expansión térmica del fluido base y de las nanopartículas, respectivamente.

2. Modelo para nanofluidos híbridos

Para flujos que involucran dos tipos de nanopartículas, como en el caso de nanofluidos híbridos, se utiliza una extensión del modelo de mezcla, como el empleado por Saqib et al. [75]:

$$\frac{(\rho\beta)_{hnf}}{(\rho\beta)_f} = \frac{(1 - \phi)(\rho\beta)_f + \phi_1(\rho\beta)_{s1} + \phi_2(\rho\beta)_{s2}}{(\rho\beta)_f} \quad (2.41)$$

Este modelo permite representar el efecto combinado de ambos tipos de nanopartículas en la expansión térmica del sistema, y ha sido empleado con éxito en simulaciones de flujos convectivos donde la flotación térmica tiene un papel importante.

Conductividad eléctrica

La conductividad eléctrica del nanofluido, denotada por σ_{nf} , representa la capacidad del fluido para transportar corriente eléctrica. Esta propiedad es importante en flujos sometidos a campos electromagnéticos, como en la magnetohidrodinámica (MHD), ya que determina la magnitud de la fuerza de Lorentz que actúa sobre el fluido.

La adición de nanopartículas mejora significativamente la conductividad eléctrica del fluido base, especialmente cuando se emplean materiales metálicos o semiconductores. Este incremento depende de la fracción volumétrica, la temperatura, el tamaño, forma y tipo de nanopartícula.

1. Modelo clásico de Maxwell

El modelo propuesto por Maxwell es una de las expresiones más utilizadas para predecir la conductividad eléctrica de nanofluidos con partículas esféricas, y ha sido validado experimentalmente para diversas combinaciones de nanopartículas [82]:

$$\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} = 1 + 3\phi \left(\frac{\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1}{\frac{\sigma_s}{\sigma_f} + 2 - \phi \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1 \right)} \right) \quad (2.42)$$

donde σ_s y σ_f son las conductividades eléctricas de la nanopartícula y el fluido base, respectivamente.

2. Modelo extendido para nanofluidos híbridos

Saqib et al. [80] propusieron una extensión del modelo de Maxwell para nanofluidos híbridos, considerando el efecto combinado de dos tipos de nanopartículas:

$$\frac{\sigma_{hnf}}{\sigma_f} = 1 + \frac{3\phi(\phi_1\sigma_{s1} + \phi_2\sigma_{s2} - \phi\sigma_f)}{(\phi_1\sigma_{s1} + \phi_2\sigma_{s2} + 2\phi\sigma_f) - \phi(\phi_1\sigma_{s1} + \phi_2\sigma_{s2} - \phi\sigma_f)} \quad (2.43)$$

Este modelo ha sido utilizado en varios estudios numéricos de flujos MHD para estimar de manera más realista los efectos de la conductividad eléctrica sobre la generación de entropía.

3. Modelo empírico de Ganguly et al.

Ganguly et al. [83] propusieron un modelo experimental basado en el comportamiento de nanofluidos de Al_2O_3 en agua, considerando tanto la fracción volumétrica como la temperatura del sistema. La expresión obtenida es:

$$\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} = 3679.049\phi + 1.085779T - 43.6384 \quad (2.44)$$

donde T es la temperatura del nanofluido en grados Celsius. Este modelo ha demostrado buen ajuste en estudios donde el efecto térmico sobre la conductividad eléctrica es significativo.

2.7. Magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica (MHD) es la rama de la física encargada del estudio del comportamiento de fluidos eléctricamente conductores bajo la influencia de campos magnéticos. La interacción entre el campo magnético y el fluido induce corrientes eléctricas que, a su vez, generan fuerzas mecánicas que modifican el movimiento del fluido. Esta disciplina trata el fluido

desde una perspectiva macroscópica, considerándolo como un continuo que puede describirse en términos de propiedades locales [84].

Cuando un fluido conductor se ve afectado por un campo electromagnético, su comportamiento difiere significativamente del de un fluido convencional. Las ecuaciones clásicas de la hidrodinámica deben complementarse con las ecuaciones del electromagnetismo, conocidas como las ecuaciones de Maxwell, las cuales, en forma diferencial, se expresan como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho z}{\varepsilon} \quad (2.45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.46)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.47)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.48)$$

donde ε y μ representan la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio, respectivamente. Las magnitudes $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ corresponden al campo eléctrico, la inducción magnética y la densidad de corriente eléctrica, mientras que $\rho z(\mathbf{r}, t)$ es la densidad de carga eléctrica, siendo z la carga por unidad de masa.

Aproximaciones MHD

En problemas de MHD con metales líquidos o nanofluidos bajo campos magnéticos estacionarios o de baja frecuencia, se pueden realizar varias simplificaciones comunes:

- La velocidad del fluido es mucho menor que la de la luz: $u^2 \ll c^2$.
- Los campos magnéticos se consideran cuasi-estacionarios.
- Se desprecia la corriente de desplazamiento: $\varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t \approx 0$.
- El término de fuerza eléctrica $\rho z \mathbf{E}$ en la fuerza de Lorentz es despreciable frente a $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$.
- La corriente total $\mathbf{I} = \rho z \mathbf{u} + \mathbf{j}$ se aproxima como $\mathbf{I} \approx \mathbf{j}$.

Estas simplificaciones permiten obtener una forma reducida de la fuerza de Lorentz:

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.49)$$

Ecuaciones fundamentales de la MHD

Bajo las aproximaciones anteriores, las ecuaciones gobernantes para un flujo MHD se escriben como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{conservación de masa}) \quad (2.50)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (\text{conservación de momento}) \quad (2.51)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (\text{energía}) \quad (2.52)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \quad (2.54)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.56)$$

Estas ecuaciones determinan el comportamiento de los campos eléctricos, magnéticos y la distribución de corriente dentro del fluido. En la mayoría de aplicaciones prácticas, la ecuación de Gauss para el campo eléctrico se omite, ya que ρ_e no es relevante en este régimen y $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ quedan determinadas por las demás ecuaciones y la ley de Ohm.

2.8. Producción de entropía

De acuerdo con la segunda ley de la termodinámica, la entropía de un sistema cerrado aumenta en presencia de procesos irreversibles. Una forma local de evaluar esta variación consiste en

relacionar el cambio de entropía con los mecanismos que producen disipación de energía en el sistema, como la conducción de calor, la fricción viscosa y la conducción eléctrica [11, 16, 69].

Partimos de la forma local de la primera ley de la termodinámica, tal como se desarrolla en los trabajos de Ibáñez et al. [31]:

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - p \frac{d\rho^{-1}}{dt} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.57)$$

donde e es la energía interna por unidad de masa, $\mathbf{J}_q$ es el vector de flujo de calor, $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos viscosos, $\mathbf{j}$ es la densidad de corriente eléctrica, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son los campos eléctrico y magnético, y $\mathbf{u}$ es el campo de velocidad del fluido.

La relación de Gibbs para un sistema monocomponente se expresa como [16, 69]:

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad (2.58)$$

lo cual permite relacionar el cambio de entropía específica s con la evolución de la energía interna y la densidad. Sustituyendo en esta ecuación el término de energía interna, se obtiene:

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_q}{T} \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.59)$$

Comparando esta ecuación con la forma general del balance local de entropía, como se discute en Chester [14] y en Ibáñez et al. [28]:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \dot{S}, \quad (2.60)$$

podemos identificar el flujo de entropía como

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{T} \mathbf{J}_q, \quad (2.61)$$

y la producción de entropía por unidad de volumen como

$$\dot{S} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.62)$$

Esta expresión muestra que la producción de entropía presenta tres términos, cada uno asociado a una fuente de irreversibilidad del sistema. El primero representa las pérdidas por conducción

térmica, el segundo está relacionado con la disipación viscosa y el tercero corresponde a la conducción eléctrica en presencia de campos electromagnéticos.

La estructura matemática de $\dot{S}$ revela una forma bilineal, en la que cada término se expresa como el producto escalar entre un flujo termodinámico y su fuerza conjugada. Esto se puede relacionar con las leyes de transporte fenomenológicas que vinculan los flujos con los gradientes o fuerzas generalizadas que los generan. Estas relaciones, conocidas como las leyes de Fourier, Newton y Ohm, se expresan respectivamente como [8, 31]:

$$\mathbf{J}_q = -\kappa \nabla T, \quad (2.63)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} - \eta (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (2.64)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.65)$$

donde κ es la conductividad térmica, λ el segundo coeficiente de viscosidad, η la viscosidad dinámica, y σ la conductividad eléctrica. La matriz identidad se denota por $\mathbf{I}$.

Al sustituir estas expresiones en la ecuación de producción de entropía, se observa que cada uno de los términos toma la forma de un producto cuadrático positivo si los coeficientes de transporte son positivos. Esto garantiza que $\dot{S} \geq 0$, en concordancia con la segunda ley de la termodinámica y con los resultados experimentales [16, 31].

2.9. Conclusión

En este capítulo se han establecido los principios teóricos que permiten modelar de forma rigurosa el comportamiento de nanofluidos híbridos sometidos a campos magnéticos. La segunda ley de la termodinámica y su formulación local en términos de producción de entropía proporcionan el criterio central para evaluar la irreversibilidad de los procesos considerados.

La termodinámica irreversible lineal, junto con las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos, ofrecen las herramientas necesarias para derivar las expresiones gobernantes del sistema, mientras que el estudio de las propiedades termofísicas de los nanofluidos mediante modelos validados en la literatura permite una caracterización precisa del medio fluido. Así mismo, el marco de la MHD proporciona la base para incorporar efectos electromagnéticos en la dinámica del flujo, lo cual es esencial para capturar fenómenos como la disipación óhmica, la influencia de la fuerza de Lorentz y la modificación de perfiles térmicos.

Este conjunto de fundamentos será clave para el desarrollo del modelo matemático, su posterior

adimensionalización, resolución numérica y análisis de resultados, los cuales se presentan en los capítulos siguientes.

Capítulo 3

Metodología y Desarrollo del Modelo

3.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla la metodología seguida para modelar, formular y resolver el sistema físico asociado al flujo magnetohidrodinámico (MHD) de un nanofluido híbrido dentro de un canal inclinado. La metodología parte de una revisión cronológica de los antecedentes teóricos y aplicados que fundamentan el estudio de transferencia de calor, masa y generación de entropía en medios porosos y sistemas con campos electromagnéticos, considerando fenómenos relevantes como radiación térmica no lineal, succión e inyección de fluido, esfuerzo acoplado, y los efectos combinados de movimiento browniano y termoforesis.

El análisis considera una modelación rigurosa del sistema físico mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales que representan las leyes de conservación de cantidad de movimiento, energía y masa, adaptadas al contexto de nanofluidos híbridos. Se incluyen efectos por fricción de Darcy y Forchheimer, calentamiento óhmico, y disipación viscosa, entre otros. Estas ecuaciones son posteriormente adimensionalizadas para facilitar el análisis paramétrico y reducir la complejidad computacional del modelo.

Se describe también el procedimiento de solución numérica implementado mediante la técnica de disparo (*shooting technique*) combinada con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. A partir de las soluciones obtenidas se realiza el cálculo explícito de la generación local y global de entropía, así como de los números de Nusselt y Sherwood y el coeficiente de fricción, con el fin de evaluar el desempeño térmico e hidráulico del sistema bajo diferentes condiciones de operación. Finalmente, se propone un estudio paramétrico enfocado en la optimización de la eficiencia térmica y la minimización de la producción de entropía, en línea con los objetivos de esta investigación.

3.2. Metodología

1. Introducción

- a) El estado cronológico en el que se realizó la revisión de antecedentes.

2. Modelación del sistema físico

3. Perfil de velocidad

- a) Determinación de la ecuación de balance de momento del fluido MHD, a través de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento considerando la fuerza de Lorentz debida al campo magnético externo aplicado, succión/inyección del fluido a través de las paredes permeables del microcanal y régimen de flujo de Darcy-Forchheimer a través del medio poroso. Se utilizan condiciones de frontera de deslizamiento en las paredes del microcanal.
- b) A través de cambios de variables, se trabaja con expresiones adimensionales de la ecuación de balance de momento y condiciones de frontera lo cual permite agrupar varios parámetros del modelo matemático en un único número adimensional y realizar el análisis de los resultados en base al significado físico de dichos números adimensionales. Se obtiene una expresión para la velocidad del nanofluido en función de parámetros adimensionales como los números de Reynold, Hartmann y Darcy.
- c) Se utiliza el programa Mathematica v10 para realizar los cálculos y gráficas de los resultados, lo cual nos permite analizar los efectos que tienen diferentes parámetros del sistema sobre el campo de velocidades.

4. Perfil de temperatura

- a) Determinación de la ecuación de balance de energía, tomando en cuenta la disipación por fricción con las paredes del microcanal y con el medio poroso, así como el calentamiento de Joule debido a la presencia del campo magnético, y los efectos relacionados con el movimiento browniano y la termoforesis. Se utiliza la solución del campo de velocidad previamente encontrada.
- b) De manera similar a la ecuación de balance de la cantidad de movimiento, la ecuación de balance de energía se adimensionaliza y se resuelve utilizando el programa Mathematica v10. Esto nos permite observar los impactos que tienen diferentes parámetros del sistema en el campo de temperatura.

5. Concentración de masa

- a) Luego de obtener los resultados anteriores, sigue la determinación de la ecuación de concentración de masa. Tomando en cuenta la velocidad, temperatura y continuidad, se construye una propuesta.
- b) Al igual que las anteriores ecuaciones obtenidas, la ecuación de concentración se trabaja con variables adimensionales, para luego ser resuelta usando los mismos programas ya mencionados. Con esto se busca obtener información acerca del nivel de concentración de materia en el nanofluido.

6. Se obtiene una solución numérica de las ecuaciones utilizando el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden en conjunto con la técnica de lanzamiento (Shooting Technique) que permite convertir un problema de valores en la frontera en un problema de condiciones iniciales.

7. Validación del modelo matemático mediante comparación con resultados obtenidos en trabajos previos para determinadas condiciones límites que permitan realizar dicha comparación..

8. Producción local y global de entropía

- a) Determinación de la ecuación para el cálculo de la producción local y global de entropía considerando los términos asociados a irreversibilidades térmica, viscosa, de calentamiento de Joule y difusivas debidas al movimiento browniano y efecto de termoforesis.
- a) De las soluciones obtenidas para el perfil de velocidad, temperatura y la ecuación de concentración del nanofluido se obtiene una expresión explícita de la función producción local de entropía, para después integrar esta expresión en todo el volumen del sistema y así determinar la producción global de entropía en función de los parámetros que caracterizan el sistema.
- b) Realización de estudio sensibilidad determinando las condiciones de operación con mínima generación de entropía global.

9. Análisis de números adimensionales relevantes y el coeficiente de fricción

- a) Haciendo uso de los gradientes de velocidad, temperatura y concentración se determinan los números de Nusselt, Sherwood y coeficiente de fricción.
- b) Se realiza un estudio paramétrico de las cantidades para buscar condiciones de operación del sistema con máxima y/o mínima transferencia de calor, masa y mínima

fricción que permita, por un lado, lograr la transferencia de calor y concentración deseada y, por el otro, lograr el flujo deseado con el menor consumo de potencia.

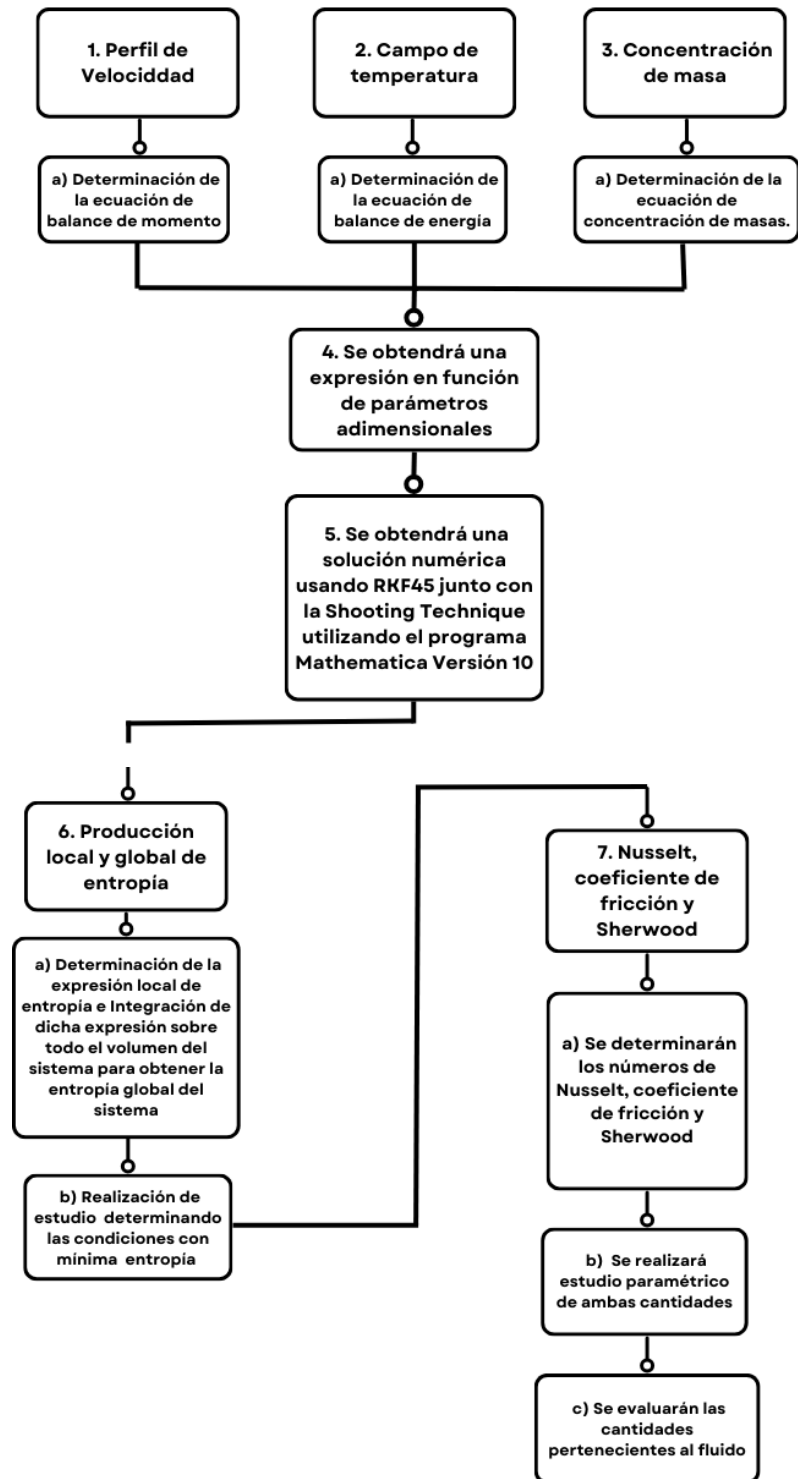


Figura 3.1: Diagrama de flujo de la metodología.

3.3. Modelo físico y consideraciones básicas del sistema

Se considera un flujo MHD completamente desarrollado, laminar y bidimensional de un nanofluido híbrido viscoso e incompresible, que se desplaza entre dos placas paralelas planas permeables separadas una distancia a . El modelo se desarrolla bajo el marco del régimen de flujo Darcy–Forchheimer, incorporando además el efecto de esfuerzo acoplado, como ha sido propuesto por Ibáñez et al. [31], Gómez et al. [28], y también en estudios recientes como los de Kalaivanan y Saqib [51, 75].

La placa inferior del canal se encuentra en contacto con una fuente térmica (fluido caliente), mientras que la superior se mantiene en contacto con el ambiente. Se supone que el nanofluido se inyecta uniformemente a través de la placa inferior, mientras que ocurre succión a través de la placa superior. La condición de deslizamiento hidrodinámico se impone en ambas paredes, lo que permite representar de manera más realista los efectos interfaciales en sistemas microescala o en presencia de materiales de baja rugosidad superficial.

El análisis térmico incluye el efecto de radiación térmica no lineal, modelado mediante la aproximación de Rosseland, así como los términos asociados a la disipación viscosa y la disipación óhmica debido a la interacción del campo magnético con el fluido conductor. También se considera la influencia de los mecanismos de transporte de masa asociados al movimiento browniano y al efecto termoforesis de las nanopartículas en suspensión. Se asume que las nanopartículas y el fluido base están en equilibrio térmico local y se mueven con la misma velocidad media, lo que justifica el uso del modelo de nanofluido monofásico.

Este conjunto de consideraciones permite formular un sistema de ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento, energía y concentración de masa, cada una modificada por la presencia del medio poroso, las condiciones MHD, y los efectos propios de los nanofluidos híbridos, tal como se ha abordado en diversos trabajos recientes sobre optimización térmica y generación de entropía mínima.

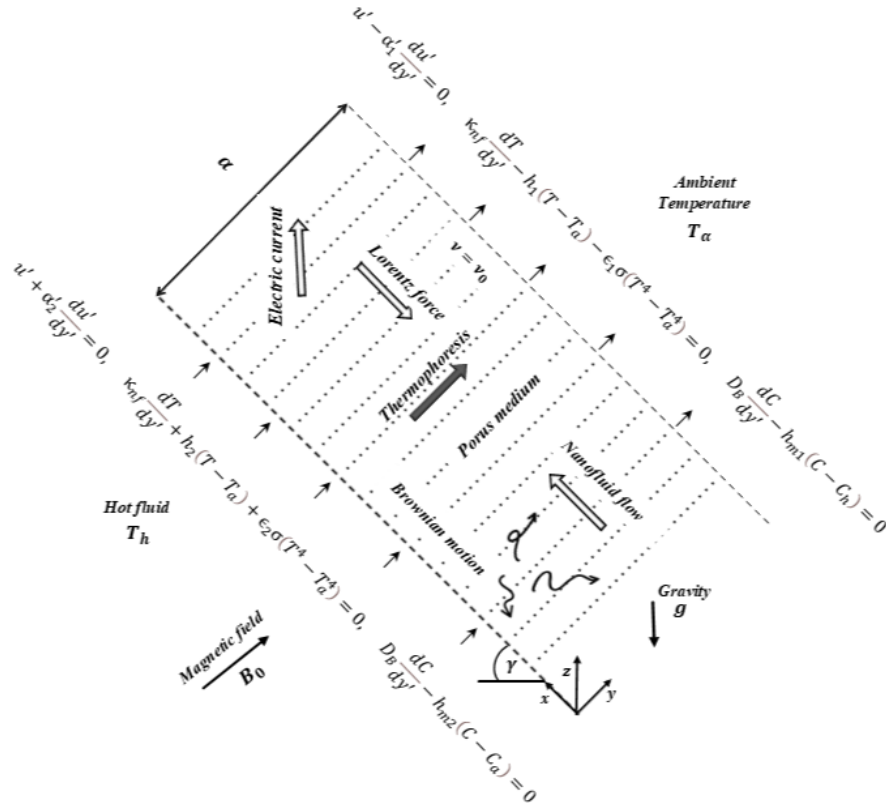


Figura 3.2: Geometría del modelo físico.

3.4. Ecuación de balance de momento

Esta ecuación describe cómo las fuerzas que actúan sobre el fluido afectan su movimiento. Involucra los efectos del campo magnético, el medio poroso, la inclinación del canal y las interacciones entre las partículas del nanofluido.

$$\begin{aligned} \rho_{nf} v_0 \frac{du'}{dy'} = & -\frac{dp}{dx'} + \eta_{nf} \frac{d^2 u'}{dy'^2} + g(\rho\beta)_{nf}(T - T_a) \sin(\gamma) \\ & - \frac{\eta_{nf}}{K} u' - \frac{\eta_{nf} F}{\sqrt{K}} u'^2 - \sigma_{nf} B_0^2 u' - \delta \frac{d^4 u'}{dy'^4} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cada término tiene un significado físico específico: $\rho_{nf} v_0 \frac{du'}{dy'}$, $-\frac{dp}{dx'}$ es el gradiente de presión en la dirección x' , $\eta_{nf} \frac{d^2 u'}{dy'^2}$ es la disipación viscosa debido a las fuerzas de fricción internas del nanofluido, $g\beta(T - T_a) \sin(\gamma)$ es la fuerza de flotación debida al gradiente de temperatura y

la inclinación del canal, $-\frac{\eta_{nf}}{K}u'$ es el efecto del arrastre debido al medio poroso (término de Darcy), $-\frac{\eta_{nf}F}{\sqrt{K}}u'^2$ es el efecto inercial en el flujo poroso (término de Forchheimer), $-\sigma_{nf}B_0^2u'$ es la fuerza de Lorentz que se opone al flujo debido al campo magnético, $\delta\frac{d^4u'}{dy'^4}$ es el término de esfuerzos acoplados relacionado con el tamaño de las partículas.

3.4.1. Condiciones de fronteras asociadas de deslizamiento

- En la **placa inferior** ($y' = 0$):

$$u' - \alpha'_1 \frac{du'}{dy'} = 0 = \frac{d^2u'}{dy'^2} \quad (3.2)$$

- En la **placa superior** ($y' = a$):

$$u' + \alpha'_2 \frac{du'}{dy'} = 0 = \frac{d^2u'}{dy'^2} \quad (3.3)$$

3.5. Ecuación de balance de energía

La ecuación de energía describe cómo se transfiere el calor dentro del flujo. Considera el transporte de calor.

$$\begin{aligned} (\rho C_p)_{nf} v_0 \frac{dT}{dy'} &= k_{nf} \frac{d^2T}{dy'^2} + \eta_{nf} \left(\frac{du'}{dy'} \right)^2 + \sigma_{nf} B_0^2 u'^2 - \frac{dq_r}{dy'} + \frac{\eta_{nf}}{K} u'^2 \\ &+ \frac{\rho_{nf} F}{\sqrt{K}} u'^3 + \delta \left(\frac{d^2u'}{dy'^2} \right)^2 + (\rho C_p)_{nf} \left(D_B \frac{dC}{dy'} \frac{dT}{dy'} + \frac{D_T}{T_a} \left(\frac{dT}{dy'} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los términos en esta ecuación son: $(\rho C_p)_{nf} v_0 \frac{dT}{dy'}$ es el transporte de energía debido al flujo del nanofluido, $k_{nf} \frac{d^2T}{dy'^2}$ es la difusión de calor por conducción, $\eta_{nf} \left(\frac{du'}{dy'} \right)^2$ es la disipación viscosa, $\sigma_{nf} B_0^2 u'^2$ es la disipación óhmica por el campo magnético, $-\frac{dq_r}{dy'}$ es el término de radiación térmica no lineal (flujo radiativo), $\frac{\eta_{nf}}{K} u'^2$ es la disipación debida al arrastre poroso de Darcy, $\frac{\rho_{nf} F}{\sqrt{K}} u'^3$ es la disipación asociada al término de Forchheimer, $\delta \left(\frac{d^2u'}{dy'^2} \right)^2$ es la disipación por esfuerzos acoplados, $(\rho C_p)_{nf} D_B \frac{dC}{dy'} \frac{dT}{dy'}$ es el flujo de calor asociado a la concentración de nanopartículas mediante el coeficiente de difusión browniano, $(\rho C_p)_{nf} \frac{D_T}{T_a} \left(\frac{dT}{dy'} \right)^2$ es el flujo de calor asociado a la concentración de nanopartículas mediante el coeficiente de difusión termofórico.

Tratamiento del término de radiación térmica

En la ecuación de energía, el término correspondiente a la *radiación térmica no lineal* se modela bajo la aproximación de *difusión de Rosseland*. Este modelo es ampliamente utilizado para describir el flujo de calor radiativo en medios ópticamente densos y ha sido aplicado en múltiples estudios sobre flujos de nanofluidos y MHD, como los realizados por Nachiketa et al. [31], Rodolfo et al. [28] y autores como Kalaivanan y Saqib [51, 75].

Bajo esta aproximación, el flujo de calor radiativo se expresa como:

$$q_r = -\frac{4\sigma^*}{3k^*} \frac{\partial T^4}{\partial y'} = -\frac{16\sigma^* T^3}{3k^*} \frac{\partial T}{\partial y'} \quad (3.5)$$

donde σ^* es la constante de Stefan–Boltzmann y k^* es el coeficiente medio de absorción de Rosseland. Este modelo supone que la radiación se comporta de manera difusiva y que las propiedades ópticas del medio varían suavemente con la posición.

Para incorporar este término en la ecuación de energía, se deriva q_r respecto a y' :

$$-\frac{\partial q_r}{\partial y'} = -\frac{\partial}{\partial y'} \left(-\frac{16\sigma^* T^3}{3k^*} \frac{\partial T}{\partial y'} \right)$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial y'} = \frac{16\sigma^*}{3k^*} \left(3T^2 \frac{\partial T}{\partial y'} \frac{\partial T}{\partial y'} + T^3 \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \right)$$

Simplificando:

$$-\frac{\partial q_r}{\partial y'} = \frac{16\sigma^*}{3k^*} \left(3T^2 \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right)^2 + T^3 \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \right)$$

Esta forma no lineal del flujo radiativo, como también ha sido utilizada por Ibáñez et al. [31], permite capturar con mayor precisión los efectos térmicos en medios donde los gradientes de temperatura son significativos. Su inclusión en la ecuación de energía permite analizar cómo la radiación afecta el perfil térmico del nanofluido en canales con gradientes térmicos intensos.

Por lo tanto la ecuación de balance de energía se describe de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
(\rho C_p)_{nf} v_0 \frac{dT}{dy'} &= k_{nf} \frac{d^2 T}{dy'^2} + \eta_{nf} \left(\frac{du'}{dy'} \right)^2 + \sigma_{nf} B_0^2 u'^2 - \frac{16\sigma^*}{3k^*} \left(3T^2 \left(\frac{dT}{dy'} \right)^2 + T^3 \frac{d^2 T}{dy'^2} \right) \\
&+ \frac{\eta_{nf}}{K} u'^2 + \frac{\rho_{nf} F}{\sqrt{K}} u'^3 + \delta \left(\frac{d^2 u'}{dy'^2} \right)^2 + (\rho C_p)_{nf} D_B \frac{dC}{dy'} \frac{dT}{dy'} + (\rho C_p)_{nf} \frac{D_T}{T_a} \left(\frac{dT}{dy'} \right)^2
\end{aligned} \quad (3.6)$$

3.5.1. Condiciones de fronteras por radiación y convección asociadas

- En la **placa inferior** ($y' = 0$):

$$k_{nf} \frac{dT}{dy'} - h_1(T - T_a) - \varepsilon_1 \sigma (T^4 - T_a^4) = 0 \quad (3.7)$$

- En la **placa superior** ($y' = a$):

$$k_{nf} \frac{dT}{dy'} + h_2(T - T_a) + \varepsilon_2 \sigma (T^4 - T_a^4) = 0 \quad (3.8)$$

3.6. Ecuación de concentración de masa

Esta ecuación describe cómo las nanopartículas se distribuyen en el fluido, tomando en cuenta dos efectos clave: el movimiento aleatorio de las partículas (movimiento browniano) y la tendencia de las partículas a moverse en respuesta a gradientes de temperatura (termoforesis).

$$v_0 \frac{dC}{dy'} = D_B \frac{d^2 C}{dy'^2} + \frac{D_T}{T_a} \frac{d^2 T}{dy'^2} \quad (3.9)$$

Los términos son: $v_0 \frac{\partial C}{\partial y'}$ transporte de partículas debido a la inyección o succión, $D_B \frac{\partial^2 C}{\partial y'^2}$ difusión browniana de las nanopartículas, $\frac{D_T}{T_a} \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2}$ difusión termofórica asociada al gradiente de temperatura.

3.6.1. Condiciones de fronteras para la ecuación de concentración

- En la **placa inferior** ($y' = 0$):

$$D_B \frac{dC}{dy'} - h_{m1}(C - C_h) = 0 \quad (3.10)$$

- En la **placa superior** ($y' = a$):

$$D_B \frac{dC}{dy'} - h_{m2}(C - C_a) = 0 \quad (3.11)$$

3.7. Definición de las variables adimensionales

Empezamos definiendo las variables adimensionales de la siguiente manera:

$$u = \frac{\rho_f a u'}{\eta_f}, \quad y = \frac{y'}{a}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha'_1}{a}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha'_2}{a}, \quad \theta = \frac{T - T_a}{T_h - T_a}, \quad \theta_h = \frac{T_h}{T_a}, \quad \Phi = \frac{C - C_a}{C_h - C_a},$$

$$Da = \frac{K}{a^2}, \quad Bi = \frac{ah}{k_f}, \quad Bi_m = \frac{ah_m}{D_B}, \quad Br = \frac{\eta_f^3}{a^2 \rho_f^2 k_f T_a}, \quad Ec = \frac{v_f^2}{a^2 C_f T_a}, \quad Gr = \frac{ga^3 (\rho \beta)_f T_a}{\rho_f v_f^2},$$

$$\lambda = \frac{\delta}{a^2 \eta_f} = \frac{1}{\Gamma}, \quad Ha = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma_f}{\eta_f}}, \quad Nr = \frac{a \varepsilon \sigma T_a^3}{k_f}, \quad P = \left(\frac{a^3 \rho_f}{\eta_f^2} \right) \left(-\frac{dp}{dx'} \right), \quad Rd = \frac{16 \sigma^* T_a^3}{3 k^* k_f},$$

$$Pr = \frac{\eta_f C_f}{k_f}, \quad Re = \frac{v_0 a \rho_f}{\eta_f}, \quad Nb = \frac{(\rho C_p)_{nf} D_B (C_h - C_a)}{(\rho C_p)_f \omega}, \quad Nt = \frac{(\rho C_p)_{nf} D_T (T_h - T_a)}{(\rho C_p)_f T_a \omega},$$

$$Le = \frac{\omega}{D_B}$$

Donde ω es la difusividad térmica ($\frac{m^2}{s}$) y $\omega = \frac{k_f}{(\rho C)_f}$, v_f es la viscosidad cinemática ($\frac{m^2}{s}$) y $v_f = \frac{\eta_f}{\rho_f}$.

3.8. Ecuación adimensional de balance de momento

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{nf}}{\rho_f} Re \frac{du}{dy} = P + \frac{\eta_{nf}}{\eta_f} \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{(\rho\beta)_f} Gr (\theta_h - 1) \sin(\gamma) \\ - \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} Ha^2 u - \frac{\eta_{nf}}{\eta_f} \frac{u}{Da} - \frac{\rho_{nf}}{\rho_f} F \frac{u^2}{\sqrt{Da}} - \lambda \frac{d^4u}{dy^4} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Condiciones de fronteras

- En la **placa inferior** ($y = 0$):

$$u - \alpha_1 \frac{du}{dy} = 0 = \frac{d^2u}{dy^2} \quad (3.13)$$

- En la **placa superior** ($y = a$):

$$u + \alpha_2 \frac{du}{dy} = 0 = \frac{d^2u}{dy^2} \quad (3.14)$$

3.9. Ecuación adimensional de balance de energía

$$\begin{aligned} \frac{(\rho C_p)_{nf}}{(\rho C_p)_f} Pe \frac{d\theta}{dy} = 3Rd(\theta_h - 1) ((\theta_h - 1)\theta + 1)^2 \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 + Rd((\theta_h - 1)\theta + 1)^3 \frac{d^2\theta}{dy^2} \\ + \frac{Br}{(\theta_h - 1)} \left(\frac{\eta_{nf}}{\eta_f} \left(\left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{u^2}{Da} \right) + \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} Ha^2 u^2 + \frac{\rho_{nf}}{\rho_f} F \frac{u^3}{\sqrt{Da}} + \lambda \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right)^2 \right) \\ + \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{d^2\theta}{dy^2} + Nb \frac{d\Phi}{dy} \frac{d\theta}{dy} + Nt \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Condiciones de fronteras

- En la **placa inferior** ($y = 0$):

$$\frac{k_{nf}}{k_f} \frac{d\theta}{dy} - Bi_1(\theta - 1) - \frac{Nr_1}{\theta_h - 1} (((\theta_h - 1)\theta + 1)^4 - \theta_h^4) = 0 \quad (3.16)$$

- En la **placa superior** ($y = a$):

$$\frac{k_{nf}}{k_f} \frac{d\theta}{dy} + Bi_2 \theta + \frac{Nr_2}{\theta_h - 1} (((\theta_h - 1)\theta + 1)^4 - 1) = 0 \quad (3.17)$$

3.10. Ecuación adimensional de concentración de masa

$$PeLe \frac{d\Phi}{dy} = \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{Nt}{Nb} \frac{d^2\theta}{dy^2} \quad (3.18)$$

Condiciones de fronteras

- En la **placa inferior** ($y = 0$):

$$\frac{d\Phi}{dy} - Bi_{m1}(\Phi - 1) = 0 \quad (3.19)$$

- En la **placa superior** ($y = a$):

$$\frac{d\Phi}{dy} + Bi_{m2}\Phi = 0 \quad (3.20)$$

3.11. Propiedades termofísicas del nanofluido

Las propiedades termofísicas del nanofluido híbrido Al_2O_3 -Cu-agua, necesarias para la modelación del sistema, ya fueron definidas en el Capítulo 2. Estas incluyen la densidad efectiva, la capacidad térmica volumétrica, la viscosidad dinámica, la conductividad térmica, el coeficiente de expansión térmica y la conductividad eléctrica del nanofluido híbrido. Dichas propiedades se obtienen mediante relaciones empíricas y modelos extendidos que consideran el efecto combinado de las fases base y sólidas.

A continuación, se presentan las relaciones utilizadas en el presente estudio:

Densidad efectiva

$$\frac{\rho_{nf}}{\rho_f} = \frac{(1 - \phi)\rho_f + \phi_1\rho_{s1} + \phi_2\rho_{s2}}{\rho_f} \quad (3.21)$$

Capacidad térmica volumétrica

$$\frac{(\rho C_p)_{nf}}{(\rho C_p)_f} = \frac{(1 - \phi)(\rho C_p)_f + \phi_1(\rho C_p)_{s1} + \phi_2(\rho C_p)_{s2}}{(\rho C_p)_f} \quad (3.22)$$

Viscosidad dinámica (modelo de Einstein–Batchelor)

$$\frac{\eta_{nf}}{\eta_f} = 1 + a(\phi_1 + \phi_2) + b(\phi_1 + \phi_2)^2 \quad (3.23)$$

Conductividad térmica (modelo de Einstein–Batchelor)

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{(s-1)k_f + \left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) + (s-1)\phi \left(\left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) + k_f\right)}{(s-1)k_f + \left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) - \phi \left(\left(\frac{\phi_1 k_{s1} + \phi_2 k_{s2}}{\phi}\right) - k_f\right)} \quad (3.24)$$

Coefficiente de expansión térmica

$$\frac{(\rho\beta)_{nf}}{(\rho\beta)_f} = \frac{(1-\phi)(\rho\beta)_f + \phi_1(\rho\beta)_{s1} + \phi_2(\rho\beta)_{s2}}{(\rho\beta)_f} \quad (3.25)$$

Conductividad eléctrica

$$\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} = 1 + \frac{3\phi(\phi_1\sigma_{s1} + \phi_2\sigma_{s2} - \sigma_f)}{\phi_1\sigma_{s1} + \phi_2\sigma_{s2} + 2\sigma_f - \phi(\phi_1\sigma_{s1} + \phi_2\sigma_{s2} - \sigma_f)} \quad (3.26)$$

Tabla 3.1: Propiedades termofísicas del agua y de las nanopartículas sólidas. Fuente: [37,45].

	Al ₂ O ₃	Cu	H ₂ O
Capacidad calorífica c_p [J/kgK]	765	385	4179
Conductividad eléctrica σ [S/m]	1×10^{-12}	5.96×10^7	5.5×10^{-6}
Conductividad térmica k [W/mK]	40	400	0.613
Viscosidad dinámica η [kg/(m s)]	—	—	8.91×10^{-4}
Densidad ρ [kg/m ³]	3970	8933	997.1
Coefficiente de expansión térmica β [1/K]	0.85×10^{-5}	1.67×10^{-5}	21×10^{-5}

3.12. Generación de entropía

La generación de entropía local en el flujo MHD de un nanofluido híbrido dentro del canal inclinado se produce como resultado de diversas irreversibilidades presentes en el sistema. Estas incluyen la conducción y radiación térmica, la disipación viscosa, la disipación asociada al medio poroso (efectos de Darcy y Forchheimer), el calentamiento óhmico, el efecto de esfuerzo acoplado y la difusión browniana.

Tomando como referencia el análisis desarrollado por Ibáñez et al. [31] y Estrada et al. [37], la expresión dimensional de la generación de entropía local S' puede escribirse como:

$$S' = \frac{1}{T^2} \left(k_{nf} + \frac{16\sigma^* T^3}{3k^*} \right) \left(\frac{dT}{dy'} \right)^2 + \frac{RD_B}{C} \left(\frac{dC}{dy'} \right)^2 + \frac{RD_B}{T} \frac{dT}{dy'} \frac{dC}{dy'} + \frac{1}{T} \left[\eta_{nf} \left(\frac{du'}{dy'} \right)^2 + \frac{\eta_{nf}}{K} u'^2 + \sigma_{nf} B_0^2 u'^2 + \frac{\rho_{nf} F}{\sqrt{K}} u'^3 + \delta \left(\frac{d^2 u'}{dy'^2} \right)^2 \right] \quad (3.27)$$

Aquí, los términos representan respectivamente la producción de entropía asociada al flujo de calor por conducción y radiación térmica, difusión browniana, difusión termoforética, disipación viscosa, fricción de Darcy, calentamiento óhmico, fricción de Forchheimer y esfuerzo acoplado.

Para el análisis numérico, es útil expresar esta ecuación en forma adimensional. Usando las variables sin dimensión y los parámetros adimensionales definidos en la modelación del sistema, se obtienen las contribuciones individuales a la generación de entropía local:

■ **Entropía por conducción y radiación térmica (S_q):**

$$S_q = \frac{(\theta_h - 1)^2}{[(\theta_h - 1)\theta + 1]^2} \left(\frac{k_{hnf}}{k_f} + Rd [(\theta_h - 1)\theta + 1]^3 \right) \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 \quad (3.28)$$

■ **Entropía por difusión browniana (S_B):**

$$S_B = \frac{RD_B Ca}{k_f} \frac{(\Phi_h - 1)^2}{(\Phi_h - 1)\Phi + 1} \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)^2 \quad (3.29)$$

■ **Entropía por difusión termofórica (S_T):**

$$S_T = \frac{RD_B Ca}{k_f} \frac{(\theta_h - 1)(\Phi_h - 1)}{(\theta_h - 1)\theta + 1} \left(\frac{d\theta}{dy} \cdot \frac{d\Phi}{dy} \right) \quad (3.30)$$

■ **Entropía por disipación viscosa (S_v):**

$$S_v = \frac{Br}{(\theta_h - 1)\theta + 1} \cdot \frac{\eta_{hnf}}{\eta_f} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (3.31)$$

■ **Entropía por fricción tipo Darcy (S_{Da}):**

$$S_{Da} = \frac{Br}{(\theta_h - 1)\theta + 1} \cdot \frac{\eta_{hnf}}{\eta_f} \cdot \frac{u^2}{Da} \quad (3.32)$$

■ **Entropía por calentamiento óhmico (S_J):**

$$S_J = \frac{Br}{(\theta_h - 1)\theta + 1} \cdot \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} Ha^2 u^2 \quad (3.33)$$

■ **Entropía por efecto Forchheimer (S_F):**

$$S_F = \frac{Br}{(\theta_h - 1)\theta + 1} \cdot \frac{\rho_{nf}}{\rho_f} \cdot \frac{F}{\sqrt{Da}} u^3 \quad (3.34)$$

■ **Entropía por esfuerzos acoplados (S_δ):**

$$S_\delta = \frac{Br}{(\theta_h - 1)\theta + 1} \cdot \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 \quad (3.35)$$

La siguiente ecuación muestra cómo distintos mecanismos de irreversibilidad afectan la producción de entropía local.

$$\begin{aligned} S = & \frac{(\theta_h - 1)^2}{[(\theta_h - 1)\theta + 1]^2} \left(\frac{k_{hnf}}{k_f} + Rd[(\theta_h - 1)\theta + 1]^3 \right) \left(\frac{d\theta}{dy} \right)^2 \\ & + \frac{RD_B C_a}{k_f} \left(\frac{(\Phi_h - 1)^2}{(\Phi_h - 1)\Phi + 1} \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)^2 + \frac{(\theta_h - 1)(\Phi_h - 1)}{(\theta_h - 1)\theta + 1} \left(\frac{d\theta}{dy} \right) \left(\frac{d\Phi}{dy} \right) \right) \\ & + \frac{Br}{(\theta_h - 1)\theta + 1} \left[\frac{\eta_{hnf}}{\eta_f} \left(\left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \frac{u^2}{Da} \right) + \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} Ha^2 u^2 + \frac{\rho_{nf}}{\rho_f} \frac{F}{\sqrt{Da}} u^3 + \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 \right] \quad (3.36) \end{aligned}$$

Una vez obtenida la generación de entropía local, se puede calcular la entropía global integrando sobre la sección transversal del canal:

$$\langle S \rangle = \int_0^1 S dy \quad (3.37)$$

3.13. Transferencia de calor: número de Nusselt

La transferencia de calor en el microcanal se evalúa a través del número de Nusselt, el cual representa la razón entre el transporte convectivo total y la conducción pura. Considerando la presencia de radiación térmica no lineal, como ha sido modelado por Gómez et al. [28], Ibáñez et al. [31] y López et al. [85], el número de Nusselt local puede definirse como:

$$Nu = \frac{h \cdot a}{k_f} \quad (3.38)$$

donde a es la distancia entre las placas y k_f es la conductividad térmica del fluido base. El coeficiente de transferencia de calor h se obtiene a partir de la ley de enfriamiento de Newton:

$$h = \frac{q}{\Delta T} \quad (3.39)$$

Considerando la ley de Fourier y el flujo radiativo bajo la aproximación de Rosseland, el flujo de calor total es:

$$q = - \left(k_{nf} + \frac{16\sigma^* T_a^3}{3k^*} \right) \frac{dT}{dy'} \quad (3.40)$$

donde σ^* es la constante de Stefan–Boltzmann, k^* es el coeficiente medio de absorción de Rosseland y T_b es la temperatura media del nanofluido en la sección transversal del microcanal.

Sustituyendo en la ecuación del número de Nusselt, se obtiene:

$$Nu = - \frac{a \left(k_{nf} + \frac{16\sigma^* T_a^3}{3k^*} \right)}{k_f (T - T_b)} \left(\frac{dT}{dy'} \right) \quad (3.41)$$

Para la placa inferior, evaluada en $y' = 0$, esta expresión toma la forma:

$$Nu_{y'=0} = - \frac{a \left(k_{nf} + \frac{16\sigma^* T_a^3}{3k^*} \right)}{k_f (T_{(y'=0)} - T_b)} \left(\frac{dT}{dy'} \right)_{y'=0} \quad (3.42)$$

En términos adimensionales, y usando la relación $\theta = \frac{T - T_a}{T_h - T_a}$, la forma final del número de Nusselt queda expresada como:

$$Nu_{y=0} = - \frac{\left(\frac{k_{nf}}{k_f} + Rd \right) \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_{y=0}}{\left(\theta_{y=0} - \frac{\int_0^1 u \theta dy}{\int_0^1 u dy} \right)} \quad (3.43)$$

donde $Rd = \frac{16\sigma^* T_a^3}{3k^* k_f}$ es el número de radiación. Evaluando esta expresión en la pared superior $y = 1$ o inferior $y = 0$, se obtiene el valor local del número de Nusselt para cada placa. Esta formulación ha sido ampliamente utilizada en estudios sobre nanofluidos híbridos en microcanales con interacción magnetohidrodinámica (MHD), como los realizados por Kalaivanan et al. [51] y Saqib et al. [75].

3.14. Coeficiente de fricción

El coeficiente de fricción superficial representa una forma de arrastre que actúa como resistencia al movimiento del nanofluido en contacto con las paredes del microcanal. A medida que este coeficiente aumenta, también lo hace la energía necesaria para mantener un determinado valor de flujo. Por lo tanto, el desempeño del sistema mejora cuando dicha resistencia se reduce. El coeficiente de fricción C_f se define a partir de la tensión cortante en la pared del canal τ_w , como se expresa a continuación [31, 37]:

$$C_f = \frac{a^2 \tau_w}{\rho_f v_f^2} \quad (3.44)$$

donde $v_f = \eta_f / \rho_f$ es la viscosidad cinemática del fluido base, y τ_w representa la tensión cortante en la pared del microcanal, la cual está dada por:

$$\tau_w = \eta_{hnf} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)_{y'=a} \quad (3.45)$$

Para obtener una expresión adimensional, se realiza el siguiente cambio de variables:

$$u = \frac{\rho_f a u'}{\eta_f}, \quad y = \frac{y'}{a} \quad (3.46)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.44) y utilizando la relación entre v_f , η_f y ρ_f , se obtiene la forma adimensional del coeficiente de fricción:

$$C_{f \ y=0} = \frac{\eta_{hnf}}{\eta_f} \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} \quad (3.47)$$

donde $\left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0}$ es el gradiente de velocidad del nanofluido evaluado en la placa inferior ($y = 0$). Si se desea evaluar el coeficiente de fricción en la placa superior, se debe considerar $\left(\frac{du}{dy} \right)_{y=1}$.

3.15. Transferencia de masa

La transferencia de masa en el sistema puede cuantificarse mediante el número adimensional de Sherwood (Sh), el cual representa la razón entre el transporte convectivo y el transporte difusivo de materia. Este número es análogo al número de Nusselt en la transferencia de calor y permite evaluar la eficiencia del proceso de difusión de las nanopartículas en el nanofluido dentro del canal [86,87]. Se define como:

$$Sh = \frac{h_m \cdot a}{D_B(C - C_b)} \quad (3.48)$$

donde h_m es el coeficiente de transferencia de masa, a es la distancia entre las placas del canal y D_B es el coeficiente de difusión browniano. El coeficiente h_m se puede relacionar con la ley de Fick, considerando que el flujo de masa hacia la pared es proporcional al gradiente de concentración y a la diferencia de concentración con respecto al valor promedio del fluido. Así, la expresión para el número de Sherwood puede escribirse como:

$$h_m = -D_B \left(\frac{dC}{dy'} \right) \quad (3.49)$$

$$Sh = -\frac{D_B}{D_B} \frac{a}{(C - C_b)} \left(\frac{dC}{dy'} \right) \quad (3.50)$$

donde C_b representa la concentración promedio del nanofluido en una sección transversal del canal, mientras que C es la concentración en la superficie de la pared.

$$Sh_{y'=0} = -\frac{1}{C_{(y'=0)} - C_b} \left(\frac{dC}{dy'} \right)_{y'=0} \quad (3.51)$$

Al aplicar las variables adimensionales, $\Phi = \frac{C - C_a}{C_h - C_a}$ y $y = \frac{y'}{a}$, la expresión del número de Sherwood se transforma en:

$$Sh_{y=0} = -\frac{1}{\Phi_{y=0} - \frac{\int_0^1 u \Phi dy}{\int_0^1 u dy}} \left(\frac{d\Phi}{dy} \right)_{y=0} \quad (3.52)$$

Un valor elevado de Sh indica una mayor eficiencia en la transferencia de nanopartículas hacia o desde las paredes del canal, lo cual es de gran interés en aplicaciones de enfriamiento con nanofluidos, microcanales y sistemas de transferencia de masa controlada.

3.16. Solución numérica

Para resolver el sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales usamos Runge-Kutta con la técnica shooting, se transforma cada ecuación diferencial de orden superior en ecuaciones diferenciales de primer orden mediante el siguiente cambio de variables:

$$u = u(y), p_1 = \frac{du}{dy}, p_2 = \frac{dp_1}{dy} = \frac{d^2u}{dy^2}, p_3 = \frac{dp_2}{dy} = \frac{d^3u}{dy^3} \quad (3.53)$$

$$\theta = \theta(y), q = \frac{d\theta}{dy}. \quad (3.54)$$

$$\Phi = \Phi(y), r = \frac{d\Phi}{dy}. \quad (3.55)$$

Entonces, el sistema de ecuaciones se expresa como:

$$\frac{du}{dy} = p_1, \frac{dp_1}{dy} = p_2, \frac{dp_2}{dy} = p_3, \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{dp_3}{dy} = P + \frac{(\rho\beta)_{nf}}{(\rho\beta)_f} Gr(\theta_h - 1)\theta \sin(\gamma) + \frac{\eta_{nf}}{\eta_f} \left(p_2 - \frac{u}{Da} \right) - \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} Ha^2 u - \frac{\rho_{nf}}{\rho_f} \left(Re p_1 + \frac{Fu^2}{\sqrt{Da}} \right) \quad (3.57)$$

$$\frac{d\theta}{dy} = q, \quad (3.58)$$

$$\left(\frac{k_{nf}}{k_f} + Rd[(\theta_h - 1)\theta + 1]^3\right) \frac{dq}{dy} = Pe \left(\frac{(\rho C_p)_{nf}}{(\rho C_p)_f}\right) q - 3Rd(\theta_h - 1)[(\theta_h - 1)\theta + 1]^2 q^2$$

$$- \frac{Br}{\theta_h - 1} \left[\frac{\eta_{nf}}{\eta_f} \left(p_1^2 + \frac{u^2}{Da} \right) + \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} Ha^2 u^2 + \frac{\rho_{nf}}{\rho_f} \frac{F}{\sqrt{Da}} u^3 + \frac{1}{\Gamma} p_2^2 \right] - Nbrq - Ntq^2 \quad (3.59)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = r \quad (3.60)$$

$$\frac{dr}{dy} = RPrLer - \frac{Nt}{Nb} \frac{dq}{dy}. \quad (3.61)$$

Condiciones de frontera

En $y = 0$:

$$u(0) = \varepsilon, \quad (3.62)$$

$$p_1(0) = \frac{\varepsilon}{\alpha_1}, \quad p_2(0) = 0, \quad p_3(0) = \omega, \quad (3.63)$$

$$\theta(0) = \varphi, \quad (3.64)$$

$$q(0) = \frac{k_f}{k_{nf}} \left[Bi_1(\varphi - 1) + \frac{Nr_1}{\theta_h - 1} (((\theta_h - 1)\varphi + 1)^4 - \theta_h^4) \right], \quad (3.65)$$

$$\Phi(0) = \zeta, \quad (3.66)$$

$$r(0) = Bi_{m1}(\Phi - 1). \quad (3.67)$$

En $y = 1$: (usadas como condiciones de disparo)

$$p_1(1) = -\frac{u(1)}{\alpha_2}, \quad (3.68)$$

$$p_2(1) = 0, \quad (3.69)$$

$$q(1) = -\frac{k_f}{k_{nf}} \left[Bi_2\theta(1) + \frac{Nr_2}{\theta_h - 1} (((\theta_h - 1)\theta(1) + 1)^4 - 1) \right], \quad (3.70)$$

$$r(1) = -Bi_{m2}\Phi(1). \quad (3.71)$$

Este sistema se resuelve numéricamente utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 en

combinación con el método de disparo. Para lograr la precisión requerida, se ajustan los parámetros iniciales ε y φ de forma iterativa hasta satisfacer las condiciones de frontera en $y = 1$ con al menos seis cifras significativas.

3.17. Validación matemática del modelo y del método numérico

Con el objetivo de verificar la consistencia del modelo matemático formulado y la correcta implementación del procedimiento numérico, se realizó una validación cuantitativa tomando como referencia el trabajo de Gómez Rosales et al. sobre la producción de entropía en un nanofluido Al_2O_3 –agua en un canal inclinado con medio poroso, radiación térmica no lineal, esfuerzo acoplado y deslizamiento en las paredes [45]. En dicho estudio se resuelven las ecuaciones adimensionales de cantidad de movimiento, energía y generación local de entropía, bajo consideraciones físicas equivalentes de flujo laminar, estacionario, totalmente desarrollado, régimen Darcy–Forchheimer, acoplamiento MHD y esfuerzo acoplado; sin embargo, no se consideran explícitamente los efectos del movimiento browniano y de termoforesis.

Gómez Rosales et al. demuestran la validez de su formulación comparando sus soluciones numéricas con soluciones analíticas exactas para un caso límite en el que se anulan los efectos del medio poroso inercial, esfuerzo acoplado y radiación térmica no lineal. Se encontró coincidencia prácticamente perfecta entre los resultados obtenidos para los perfiles de velocidad, temperatura y entropía local. Al reproducir de manera fiel estos resultados numéricos, la presente investigación hereda indirectamente dicha validación analítica.

En esta tesis la validación se efectuó eligiendo como caso base el nanofluido Al_2O_3 –agua con fracción volumétrica de nanopartículas $\phi = 0.1$, y los mismos parámetros adimensionales reportados en las Tablas 2–4 del trabajo de referencia: $Bi = Nr = Ha = Re = Rd = Gr = P = Br = \lambda = 1$, $F = 5$, $\beta = \pi/6$, $\theta_h = 1.5$, $Da = 0.1$ y $\alpha = 0.1$. Por lo tanto, los parámetros que se anularon en este caso de validación fueron: $Bi_{m,1} = Bi_{m,2} = Nb = Nt = Le = 0$. Bajo estas condiciones se resolvieron las ecuaciones de momento, energía y concentración mediante el método de disparo en combinación con un esquema de integración de tipo Runge–Kutta explícito, obteniendo los perfiles de velocidad $u(y)$, temperatura $\theta(y)$ y entropía local $S(y)$ en once puntos de la coordenada transversal $y = 0, 0.1, \dots, 1$.

La comparación cuantitativa se realizó punto a punto contra los valores tabulados por Gómez Rosales et al. [45] para las mismas condiciones físicas. Para cada magnitud $Q \in \{u, \theta, S\}$ se

definió el error relativo porcentual en el punto y_i como

$$E_i(\%) = \left| \frac{Q_{\text{presente},i} - Q_{\text{ref},i}}{Q_{\text{ref},i}} \right| \times 100, \quad (3.72)$$

donde $Q_{\text{ref},i}$ corresponde a los datos publicados en [45] y $Q_{\text{presente},i}$ a los resultados obtenidos con el código desarrollado en esta tesis.

Adicionalmente, se calcularon dos métricas globales de validación ampliamente utilizadas: la raíz del error cuadrático medio (RMSE, *Root Mean Square Error*) y el error relativo promedio (E_r , *Average Relative Error*). Considerando $N = 11$ puntos uniformemente distribuidos en $y = 0, 0.1, \dots, 1$, dichas métricas se definen como

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(Q_{\text{presente},i} - Q_{\text{ref},i} \right)^2}, \quad (3.73)$$

$$E_r(\%) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{Q_{\text{presente},i} - Q_{\text{ref},i}}{Q_{\text{ref},i}} \right| \times 100. \quad (3.74)$$

Las Tablas 3.2–3.7 presentan el cálculo punto a punto de RMSE y $E_r(\%)$ para las tres magnitudes analizadas. En conjunto, estas métricas confirman una concordancia global estrecha entre el presente modelo numérico y los datos de referencia.

Tabla 3.2: Cálculo punto a punto del RMSE para la velocidad $u(y)$ (validación).

y	u_{ref}	u_{presente}	$u_{\text{presente}} - u_{\text{ref}}$	$(u_{\text{presente}} - u_{\text{ref}})^2$
0.0	0.003576	0.003579	3.0×10^{-6}	9.0×10^{-12}
0.1	0.007081	0.007087	6.0×10^{-6}	3.6×10^{-11}
0.2	0.010195	0.010206	1.1×10^{-5}	1.21×10^{-10}
0.3	0.012622	0.012636	1.4×10^{-5}	1.96×10^{-10}
0.4	0.014153	0.014172	1.9×10^{-5}	3.61×10^{-10}
0.5	0.014371	0.014694	3.23×10^{-4}	1.043×10^{-7}
0.6	0.014135	0.014163	2.8×10^{-5}	7.84×10^{-10}
0.7	0.012589	0.012619	3.0×10^{-5}	9.0×10^{-10}
0.8	0.010157	0.010186	2.9×10^{-5}	8.41×10^{-10}
0.9	0.007046	0.007071	2.5×10^{-5}	6.25×10^{-10}
1.0	0.003556	0.003570	1.4×10^{-5}	1.96×10^{-10}
			Sumatoria:	1.08398×10^{-7}
			RMSE:	9.9269×10^{-5}

Tabla 3.3: Cálculo punto a punto del RMSE para la temperatura $\theta(y)$ (validación).

y	θ_{ref}	θ_{presente}	$\theta_{\text{presente}} - \theta_{\text{ref}}$	$(\theta_{\text{presente}} - \theta_{\text{ref}})^2$
0.0	0.954725	0.954506	-2.19×10^{-4}	4.796×10^{-8}
0.1	0.904477	0.904273	-2.04×10^{-4}	4.162×10^{-8}
0.2	0.851122	0.850940	-1.82×10^{-4}	3.312×10^{-8}
0.3	0.794265	0.794112	-1.53×10^{-4}	2.341×10^{-8}
0.4	0.733342	0.733319	-2.3×10^{-5}	5.29×10^{-10}
0.5	0.668064	0.668802	7.38×10^{-4}	5.446×10^{-7}
0.6	0.597488	0.597494	6×10^{-6}	3.6×10^{-11}
0.7	0.520893	0.520989	9.6×10^{-5}	9.216×10^{-9}
0.8	0.437286	0.437500	2.14×10^{-4}	4.58×10^{-8}
0.9	0.345427	0.345798	3.71×10^{-4}	1.376×10^{-7}
1.0	0.243749	0.244329	5.8×10^{-4}	3.364×10^{-7}
Sumatoria:				1.22037×10^{-6}
RMSE:				3.3308×10^{-4}

Tabla 3.4: Cálculo punto a punto del RMSE para la entropía local $S(y)$ (validación).

y	S_{ref}	S_{presente}	$S_{\text{presente}} - S_{\text{ref}}$	$(S_{\text{presente}} - S_{\text{ref}})^2$
0.0	0.125184	0.125310	1.26×10^{-4}	1.588×10^{-8}
0.1	0.141599	0.141723	1.24×10^{-4}	1.538×10^{-8}
0.2	0.162190	0.162305	1.15×10^{-4}	1.323×10^{-8}
0.3	0.186686	0.186787	1.01×10^{-4}	1.02×10^{-8}
0.4	0.215438	0.215516	7.8×10^{-5}	6.084×10^{-9}
0.5	0.249475	0.249516	4.1×10^{-5}	1.681×10^{-9}
0.6	0.290692	0.290670	-2.2×10^{-5}	4.84×10^{-10}
0.7	0.342199	0.342064	-1.35×10^{-4}	1.822×10^{-8}
0.8	0.408942	0.408604	-3.38×10^{-4}	1.142×10^{-7}
0.9	0.498819	0.498116	-7.03×10^{-4}	4.942×10^{-7}
1.0	0.624728	0.623367	-1.36×10^{-3}	1.852×10^{-6}
Sumatoria:				2.54193×10^{-6}
RMSE:				4.8071×10^{-4}

Tabla 3.5: Cálculo punto a punto del error relativo y del error relativo promedio para $u(y)$.

y	u_{ref}	u_{presente}	$ u_{\text{presente}} - u_{\text{ref}} $	$E_i(\%) = \left \frac{u_{\text{presente}} - u_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}}} \right 100$
0.0	0.003576	0.003579	0.000003	0.0839
0.1	0.007081	0.007087	0.000006	0.0847
0.2	0.010195	0.010206	0.000011	0.1079
0.3	0.012622	0.012636	0.000014	0.1109
0.4	0.014153	0.014172	0.000019	0.1343
0.5	0.014371	0.014694	0.000323	2.2476
0.6	0.014135	0.014163	0.000028	0.1981
0.7	0.012589	0.012619	0.000030	0.2384
0.8	0.010157	0.010186	0.000029	0.2856
0.9	0.007046	0.007071	0.000025	0.3549
1.0	0.003556	0.003570	0.000014	0.3937
Promedio $E_r(\%)$:				0.3854

Tabla 3.6: Cálculo punto a punto del error relativo y del error relativo promedio para $\theta(y)$.

y	θ_{ref}	θ_{presente}	$ \theta_{\text{presente}} - \theta_{\text{ref}} $	$E_i(\%) = \left \frac{\theta_{\text{presente}} - \theta_{\text{ref}}}{\theta_{\text{ref}}} \right 100$
0.0	0.954725	0.954506	0.000219	0.0229
0.1	0.904477	0.904273	0.000204	0.0226
0.2	0.851122	0.850940	0.000182	0.0214
0.3	0.794265	0.794112	0.000153	0.0193
0.4	0.733342	0.733319	0.000023	0.0031
0.5	0.668064	0.668802	0.000738	0.1104
0.6	0.597488	0.597494	0.000006	0.0010
0.7	0.520893	0.520989	0.000096	0.0184
0.8	0.437286	0.437500	0.000214	0.0490
0.9	0.345427	0.345798	0.000371	0.1074
1.0	0.243749	0.244329	0.000580	0.2380
Promedio $E_r(\%)$:				0.05577

Tabla 3.7: Cálculo punto a punto del error relativo y del error relativo promedio para $S(y)$.

y	S_{ref}	S_{presente}	$ S_{\text{presente}} - S_{\text{ref}} $	$E_i(\%) = \left \frac{S_{\text{presente}} - S_{\text{ref}}}{S_{\text{ref}}} \right 100$
0.0	0.125184	0.125310	0.000126	0.1006
0.1	0.141599	0.141723	0.000124	0.0876
0.2	0.162190	0.162305	0.000115	0.0709
0.3	0.186686	0.186787	0.000101	0.0541
0.4	0.215438	0.215516	0.000078	0.0362
0.5	0.249475	0.249516	0.000041	0.0164
0.6	0.290692	0.290670	0.000022	0.0076
0.7	0.342199	0.342064	0.000135	0.0395
0.8	0.408942	0.408604	0.000338	0.0826
0.9	0.498819	0.498116	0.000703	0.1410
1.0	0.624728	0.623367	0.001361	0.2179
Promedio $E_r(\%)$:				0.07767

Con base en las métricas globales de validación presentadas en las Ecuaciones (3.73) y (3.74), se observa una concordancia cuantitativa alta entre los resultados del presente trabajo y los reportados por Gómez Rosales et al. [45]. En particular, la velocidad presenta un E_r del orden de $10^{-1} \%$ y un RMSE del orden de 10^{-4} , mientras que la temperatura y la entropía local muestran discrepancias aún menores ($E_r < 0.1 \%$ y RMSE del orden de 10^{-4}). Estos resultados confirman que el modelo matemático formulado y la implementación del método numérico (método de disparo acoplado a Runge–Kutta) reproducen adecuadamente los datos de referencia bajo el caso base considerado, por lo que los resultados y análisis presentados en esta tesis se consideran confiables.

3.18. Conclusión

El desarrollo metodológico presentado en este capítulo establece una base sólida para la comprensión y análisis del comportamiento térmico y de transferencia de masa en flujos MHD de nanofluidos híbridos. La formulación matemática incorpora con precisión los efectos físicos más relevantes, como la radiación térmica no lineal, el régimen poroso tipo Darcy–Forchheimer, el calentamiento óhmico y los mecanismos de transporte de nanopartículas, permitiendo describir con fidelidad la dinámica del sistema.

La adimensionalización de las ecuaciones y la implementación de un esquema numérico robusto

permiten obtener soluciones generales que pueden ser interpretadas en función de parámetros adimensionales. Esto facilita la identificación de condiciones operativas óptimas, tanto para la transferencia de calor como para la eficiencia energética del sistema.

La metodología propuesta no sólo permite evaluar la influencia de los parámetros físicos sobre los perfiles de velocidad, temperatura y concentración, sino que también proporciona una herramienta para cuantificar la generación de entropía y proponer estrategias de control que minimicen las irreversibilidades termodinámicas. Con esto, se avanza hacia el objetivo central de esta tesis que es optimizar el desempeño térmico del sistema con criterios de mínima producción de entropía y máxima eficiencia exergética.

Capítulo 4

Resultados y Discusión

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos a partir de la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales adimensionales que modelan el comportamiento de un nanofluido híbrido bajo la influencia de un campo magnético en un canal inclinado. El objetivo principal es examinar el efecto de distintos parámetros adimensionales sobre el comportamiento dinámico, térmico y de difusión de masa del sistema, así como sobre la producción de entropía, la transferencia de calor interna, el coeficiente de fricción y el número de Sherwood.

De manera particular, el análisis paramétrico se estructura alrededor de cuatro parámetros de mayor influencia física en el problema: el inverso del esfuerzo acoplado Γ , el número de radiación térmica no lineal Rd , el parámetro de termoforesis Nt y el parámetro de difusión browniana Nb . Estos parámetros se consideran *claves* porque controlan, respectivamente, la respuesta microestructural del flujo (término de esfuerzos acoplados), el transporte energético por radiación no lineal y los mecanismos dominantes de transporte de nanopartículas (termoforesis y difusión browniana).

Para garantizar comparabilidad entre escenarios, se define un conjunto de parámetros de referencia que permanece fijo en cada bloque de resultados, y a partir de dicho caso base se realizan barridos controlados. En particular, en la sección dinámica se varía Γ (de 1.0 a 0.1) y, adicionalmente, se examina la sensibilidad del perfil de velocidad frente a cambios en parámetros complementarios del transporte de cantidad de movimiento (por ejemplo Da , Ha y Ec). De forma análoga, en el análisis térmico se varía Rd (de 1.0 a 0.0) y se evalúa la influencia de parámetros asociados a la radiación en frontera (p. ej. Nr , Pr y Ec). Finalmente, en el estudio de transferencia de masa se varían Nt y Nb en los intervalos considerados, incorporando también variaciones complementarias (p. ej. Le y Re). El resto de los parámetros se mantuvieron constantes en sus valores de referencia, salvo en las subsecciones donde explícitamente se indi-

ca su variación paramétrica. En particular, el caso base empleado en este capítulo se fija como: $Ec = Ha = Re = Pr = Rd = Gr = P = \Gamma = Rd = Bi = Nr_1 = Nr_2 = Bi_1 = Bi_2 = Bim_1 = Bim_2 = Nb = Le = 1$, $\theta_h = \phi_h = 1.5$, $F = 5$, $Da = Nt = \alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$, $\beta = \pi/4$.

El capítulo se organiza en siete secciones principales. En la primera se analiza el comportamiento dinámico del nanofluido híbrido mediante los perfiles de velocidad y su sensibilidad frente a las variaciones de los parámetros seleccionados. En la segunda se estudia el comportamiento térmico, poniendo énfasis en los perfiles de temperatura y en la forma en que los mecanismos de generación interna de calor y radiación no lineal modifican la distribución térmica en el canal. La tercera sección se dedica a la transferencia de masa, donde se discuten los perfiles de concentración adimensional y la influencia relativa de la difusión browniana y la termoforesis. En la cuarta sección se caracteriza la producción de entropía local y global, identificando las regiones del canal donde las irreversibilidades son más intensas, así como su impacto en la eficiencia exergética del sistema. La quinta sección aborda la transferencia de calor, a partir del análisis del número de Nusselt y la forma en que los parámetros de estudio modifican el intercambio térmico entre las placas. En la sexta sección se presenta el análisis del coeficiente de fricción, con el fin de evaluar el comportamiento hidráulico y las pérdidas de carga asociadas al flujo. Finalmente, en la séptima sección se estudia el número de Sherwood, como indicador del transporte másico global del sistema bajo los efectos de los parámetros seleccionados.

4.1. Comportamiento dinámico

En esta sección se analiza la respuesta hidrodinámica del nanofluido híbrido a partir de los perfiles de velocidad adimensional $u(y)$. El estudio se centra en el efecto del parámetro inverso de esfuerzo acoplado Γ como mecanismo principal de control microestructural del flujo y, de manera complementaria, en la influencia de parámetros que modulan la resistencia porosa y el frenado electromagnético. En particular, se examina la sensibilidad del perfil ante variaciones de Da y Ha , manteniendo Γ fijo en un valor representativo, así como el impacto de Ec , cuyo efecto sobre la dinámica es esperado principalmente indirecto al actuar en los términos disipativos de la ecuación de energía.

En la Figura 4.1 se muestra la variación del perfil de velocidad $u(y)$ para diferentes valores de Γ , manteniendo fijos el resto de los parámetros. Se observa que, al incrementar Γ , la velocidad del nanofluido aumenta en todo el dominio del canal y el máximo del perfil se hace más pronunciado. Este comportamiento está directamente relacionado con el término de esfuerzos acoplados incluido en la ecuación de momento: recordar que $\lambda = 1/\Gamma$ mide la intensidad del efecto de esfuerzo acoplado. Valores pequeños de Γ (es decir, λ grande) intensifican las contribuciones

de cuarta derivada en la ecuación de momento, lo que se traduce en una resistencia adicional al movimiento del fluido, incrementando la fricción interna y reduciendo la velocidad. A medida que Γ aumenta, el efecto de esfuerzo acoplado se debilita, disminuye dicha resistencia microestructural y el flujo se acelera, dando lugar a perfiles más altos y con mayor gradiente cerca de las paredes.

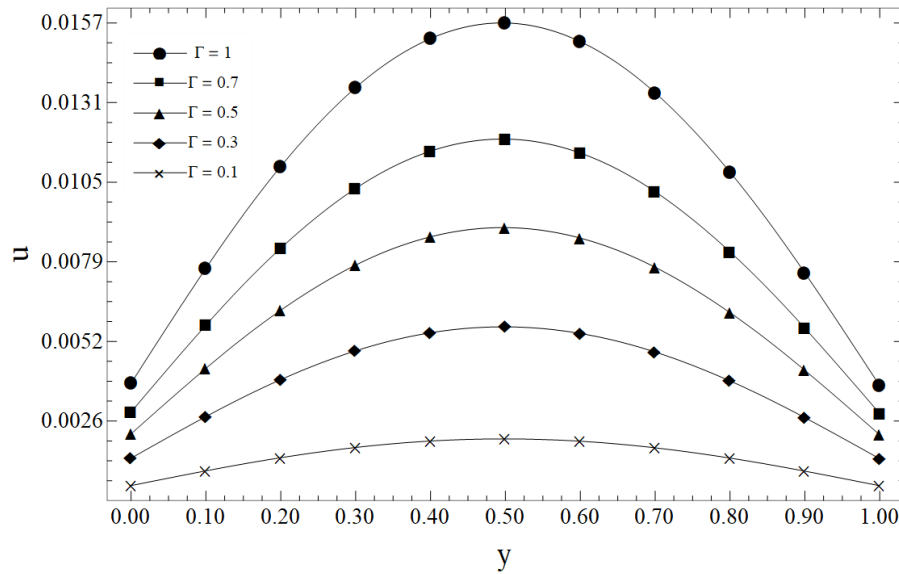


Figura 4.1: Perfil de velocidad $u(y)$ para distintos valores de Γ .

La Figura 4.2 presenta el perfil de velocidad para tres valores de Da manteniendo fijo $\Gamma = 0.5$. Se aprecia que $u(y)$ aumenta de forma sistemática al incrementar Da . Darcy mide la permeabilidad del medio poroso, valores pequeños de Da implican un medio menos permeable y, por tanto, un término de arrastre de Darcy más fuerte en la ecuación de momento. Esta resistencia porosa reduce la velocidad en todo el dominio. Cuando Da aumenta, el arrastre poroso disminuye y el fluido puede desplazarse con mayor facilidad entre las placas, lo que se refleja en perfiles de velocidad más elevados y en un máximo más pronunciado en la región central del canal.

Complementariamente, en la Figura 4.3 se presenta el efecto del número de Hartmann Ha sobre el perfil de velocidad $u(y)$, manteniendo fijo $\Gamma = 0.5$ y el resto de los parámetros tal como se indicó al inicio de este capítulo. Se observa que un incremento de Ha provoca una disminución sistemática de la velocidad en todo el dominio, con un aplanamiento del perfil en la zona central del canal. Este comportamiento es consecuencia directa de la fuerza de Lorentz generada por la interacción del campo magnético con el fluido eléctricamente conductor. Dicha fuerza actúa como un freno electromagnético opuesto al movimiento del nanofluido, reduciendo la velocidad y suavizando los gradientes de cizalla cerca de las paredes.

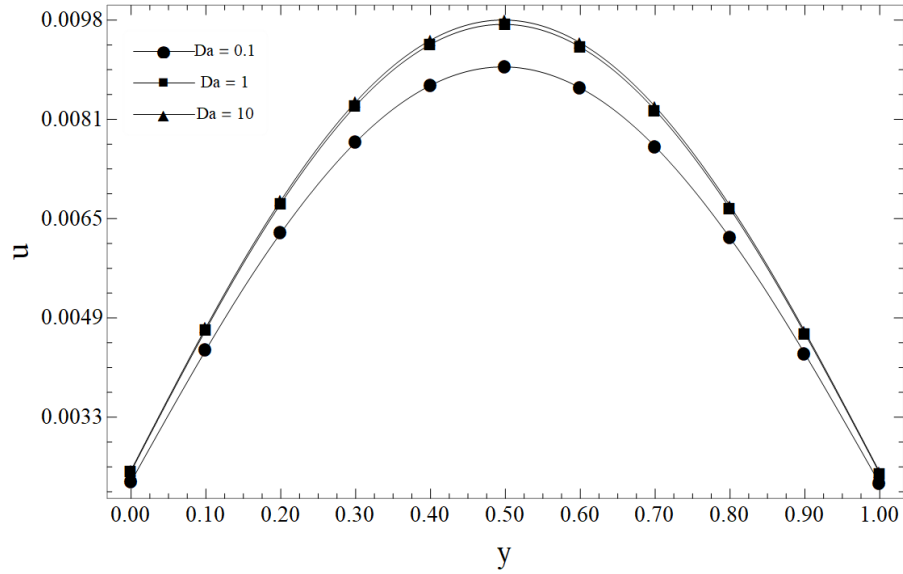


Figura 4.2: Perfil de velocidad $u(y)$ para distintos valores de Da con $\Gamma = 0.5$.

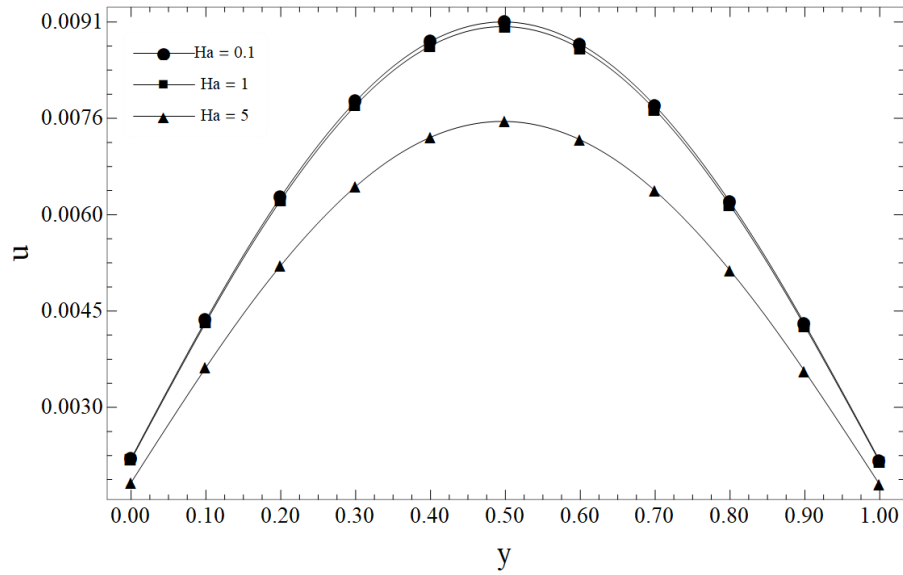


Figura 4.3: Perfil de velocidad $u(y)$ para distintos valores de Hartmann Ha con $\Gamma = 0.5$.

Finalmente, se analiza el efecto del número de Eckert sobre el comportamiento dinámico del flujo. La Figura 4.4 muestra el perfil de velocidad $u(y)$ para tres valores de Ec manteniendo fijo $\Gamma = 0.5$. Las tres curvas prácticamente se superponen, y sólo el recuadro ampliado permite distinguir ligeras diferencias. Esto indica que, en el rango de parámetros considerado, la dinámica del flujo está dominada por el gradiente de presión, el medio poroso, el campo magnético y el esfuerzo acoplado, mientras que la conversión de energía cinética en energía interna (controlada por Ec) tiene un impacto marginal sobre el campo de velocidades. En otras palabras, aumentar

Ec modifica de forma apreciable la distribución térmica y la generación de entropía, pero apenas altera la estructura del perfil de velocidad en el canal. Este resultado es consistente con la formulación del modelo, donde Ec aparece ponderando los términos disipativos en la ecuación de energía, pero no interviene directamente en la ecuación de momento.

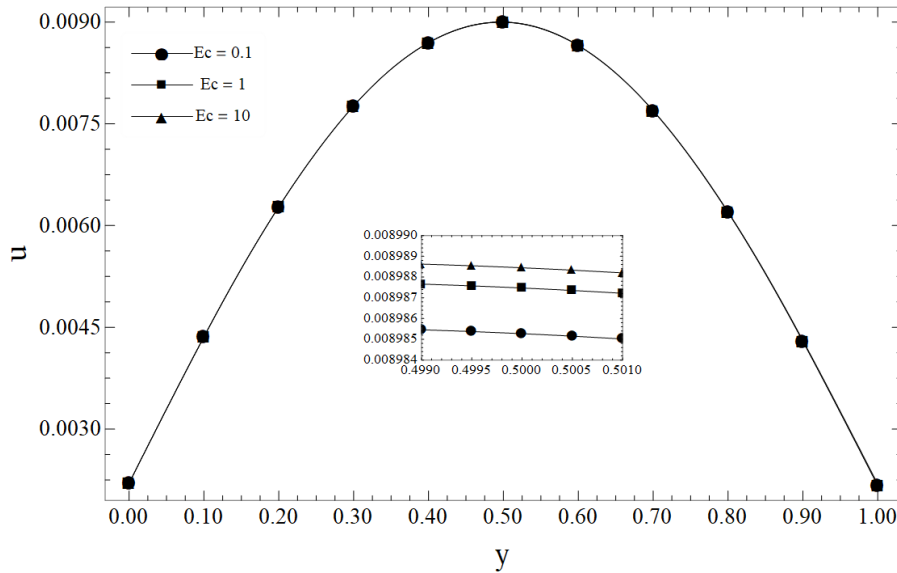


Figura 4.4: Perfil de velocidad $u(y)$ para distintos valores de Eckert Ec con $\Gamma = 0.5$.

4.2. Comportamiento térmico

En esta sección se analiza la respuesta térmica del nanofluido híbrido a partir de los perfiles de temperatura adimensional $\theta(y)$, considerando la influencia de la radiación térmica no lineal en el volumen (Rd) y en las fronteras (Nr), así como de parámetros complementarios que modulan el transporte de calor y la disipación interna (principalmente Pr y Ec), manteniendo el resto en sus valores de referencia.

La Figura 4.5 muestra el perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores del parámetro de radiación térmica no lineal Rd , manteniendo $Nr = 1$. En todos los casos, la temperatura decrece monótonamente desde la placa inferior caliente hasta la placa superior más fría. Las curvas son muy cercanas entre sí, pero el recuadro insertado permite apreciar que, para un mismo valor de y , la temperatura es ligeramente mayor cuando Rd disminuye de 1 a 0. Esto indica que, al reducir la intensidad de la radiación térmica, se debilita el mecanismo radiativo de transporte de energía hacia las paredes y una fracción mayor del calor permanece almacenado en el fluido, elevando moderadamente la temperatura en todo el dominio.

El efecto del parámetro de radiación superficial Nr se ilustra en la Figura 4.6, donde se repre-

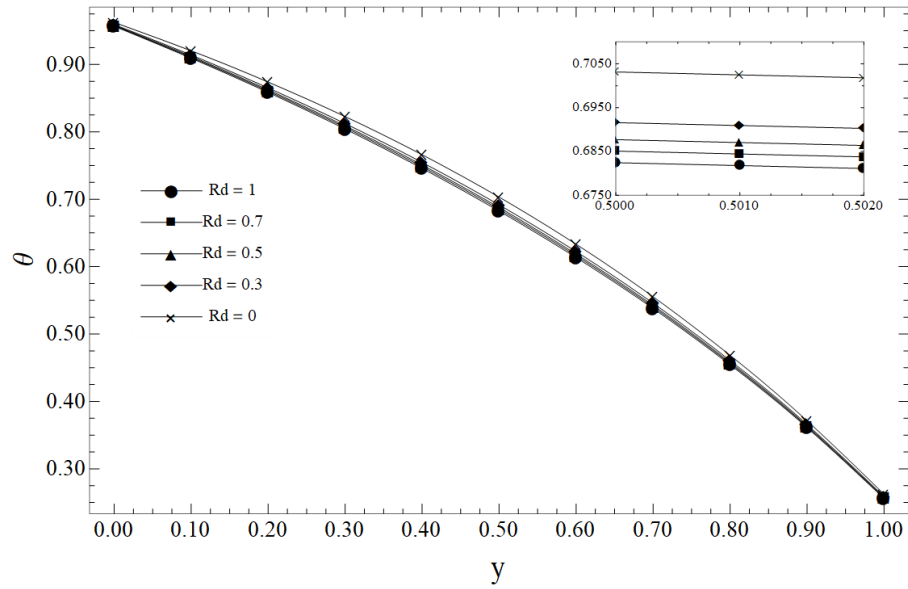


Figura 4.5: Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Rd .

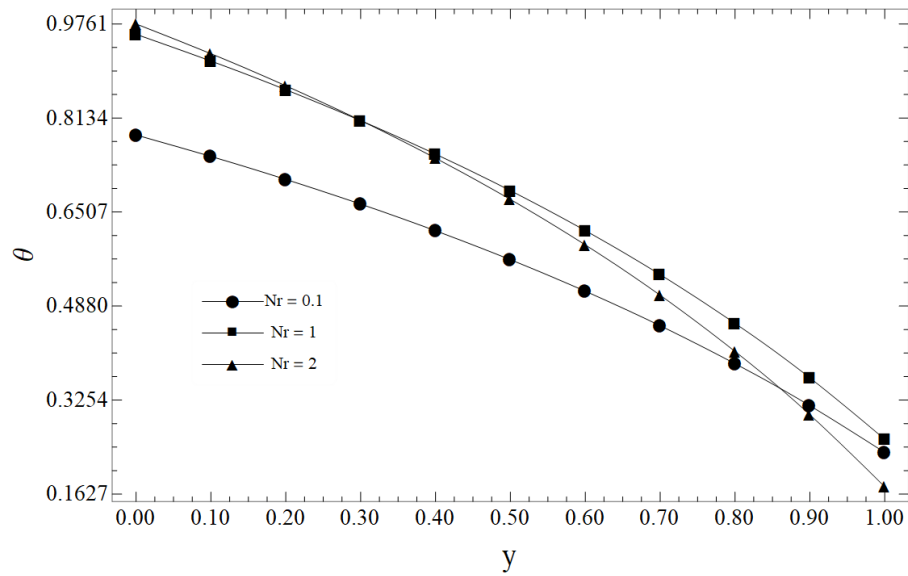


Figura 4.6: Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Nr con $Rd = 0.5$.

sentan los perfiles de $\theta(y)$ para distintos valores de Nr , manteniendo $Rd = 0.5$. Se observa que, para la mayor parte del dominio, la temperatura es mayor cuando $Nr = 1$. Un incremento de Nr fortalece la contribución radiativa en las condiciones de frontera, lo que implica un intercambio de energía más intenso entre el fluido y las placas. En el régimen considerado, este efecto se traduce en una elevación de la temperatura media del nanofluido, ya que la combinación de radiación, generación interna de calor y disipación viscosa aumenta el contenido energético del sistema.

De forma complementaria, la Figura 4.7 muestra los perfiles de temperatura $\theta(y)$ para distintos valores de Rd , manteniendo fijo $Pr = 3$. Se observa que, en todo el dominio, la temperatura resulta ligeramente mayor conforme Rd disminuye. Esto es consistente con la interpretación previa: una radiación volumétrica más intensa (mayor Rd) refuerza el transporte radiativo efectivo y favorece la extracción de energía hacia las fronteras, reduciendo moderadamente la temperatura en el interior del canal.

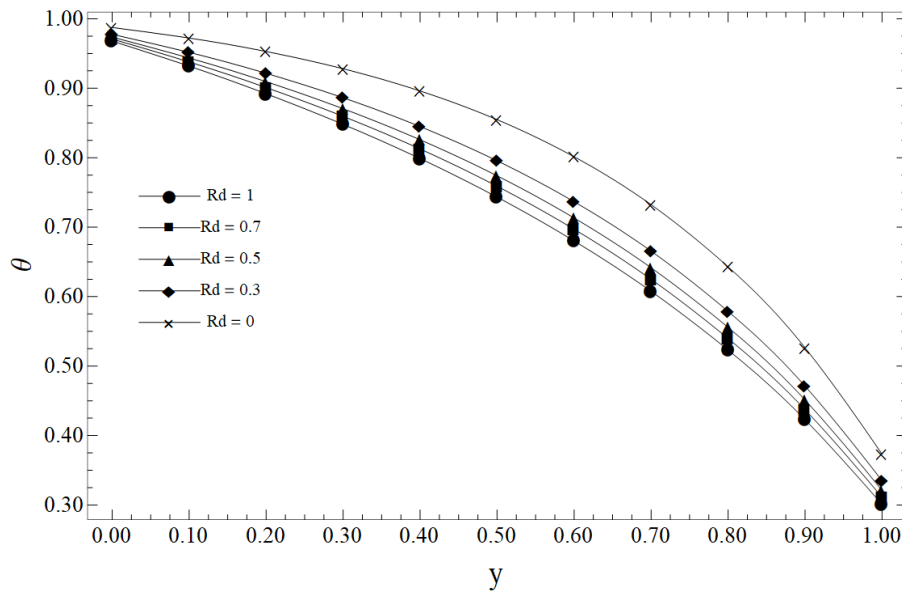


Figura 4.7: Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Rd con $Pr = 3$.

Por otra parte, la Figura 4.8 presenta la influencia del número de Prandtl Pr sobre $\theta(y)$, manteniendo fijo $Rd = 0.5$. Se aprecia que el perfil de temperatura se eleva al incrementar Pr . Dado que Pr representa la razón entre difusividad de momento y difusividad térmica, valores mayores de Pr implican una menor difusividad térmica efectiva, lo cual dificulta la difusión del calor y conduce a temperaturas adimensionales más altas dentro del canal.

Finalmente, la Figura 4.9 muestra el efecto del número de Eckert Ec sobre $\theta(y)$, manteniendo fijo $Rd = 0.5$. Las curvas son cercanas entre sí, pero se observa un incremento moderado de la temperatura al aumentar Ec . Este resultado se asocia a que Ec pondera los mecanismos disipativos (conversión de energía mecánica en calor interno), por lo que valores mayores intensifican el calentamiento interno y elevan ligeramente el campo térmico del nanofluido.

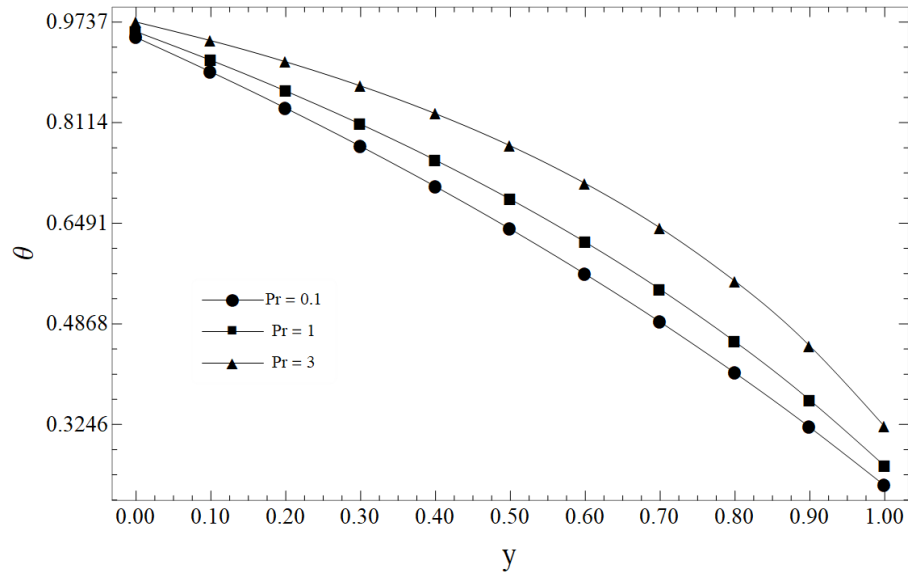


Figura 4.8: Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Pr con $Rd = 0.5$.

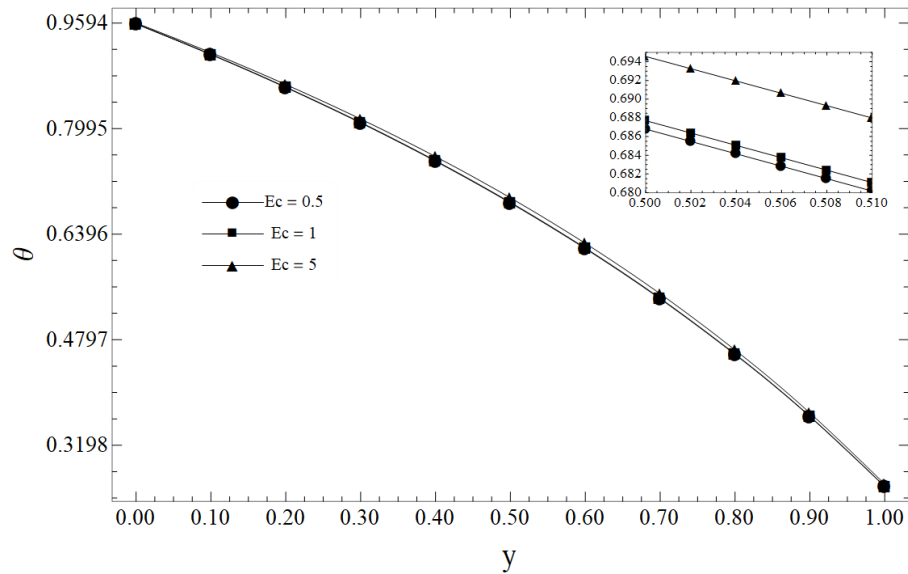


Figura 4.9: Perfil de temperatura adimensional $\theta(y)$ para distintos valores de Ec con $Rd = 0.5$.

4.3. Transferencia de masa

En esta sección se analiza la distribución de concentración adimensional $\phi(y)$ y su sensibilidad frente a los mecanismos difusivos del modelo. En particular, el transporte de nanopartículas está gobernado por el balance entre difusión browniana y termoforesis, cuyos efectos se discuten en las figuras correspondientes que se integran en esta sección.

La Figura 4.10 muestra los perfiles de concentración adimensional $\phi(y)$ para distintos valores

del parámetro de termoforesis Nt , manteniendo fijo $Nb = 1$ y el resto de parámetros en los valores de referencia. Se observa que $\phi(y)$ decrece desde la placa inferior hacia la superior en todo el intervalo $0 \leq y \leq 1$. Asimismo, al incrementar Nt las curvas se desplazan hacia valores menores de concentración en todo el dominio, lo que indica que una termoforesis más intensa modifica el transporte de nanopartículas de tal manera que reduce la concentración adimensional en el canal. En particular, la separación entre perfiles se vuelve más evidente hacia la placa superior, reflejando que el efecto de Nt es más notorio donde el balance difusivo–termoforético domina la redistribución de masa.

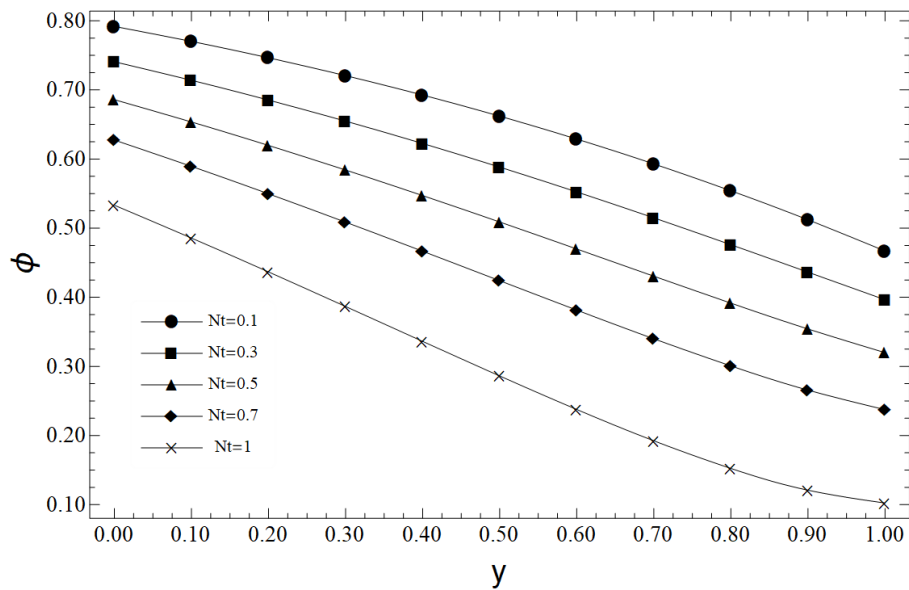


Figura 4.10: Perfiles de concentración $\phi(y)$ para distintos valores de termoforesis Nt con $Nb = 1$.

Por otro lado, la Figura 4.11 muestra el efecto del parámetro de difusión browniana Nb sobre $\phi(y)$, manteniendo $Nt = 0.6$. Se observa que al aumentar Nb la concentración adimensional se incrementa en todo el dominio del canal. Esto es consistente con la interpretación física de Nb : una difusión browniana más intensa favorece la mezcla y la dispersión de nanopartículas, suavizando la tendencia a la disminución de ϕ y elevando su nivel promedio en el canal. En consecuencia, Nb actúa como un mecanismo que compensa parcialmente los efectos de transporte inducidos por termoforesis, modificando la distribución de concentración y, por extensión, los gradientes másicos cerca de las paredes.

A continuación, se fija Nt y se explora el efecto de Nb y parámetros difusivos complementarios (Le y Re) sobre $\phi(y)$, con el fin de caracterizar la sensibilidad del transporte másico en el canal.

La Figura 4.12 muestra el perfil de concentración adimensional $\phi(y)$ para distintos valores del

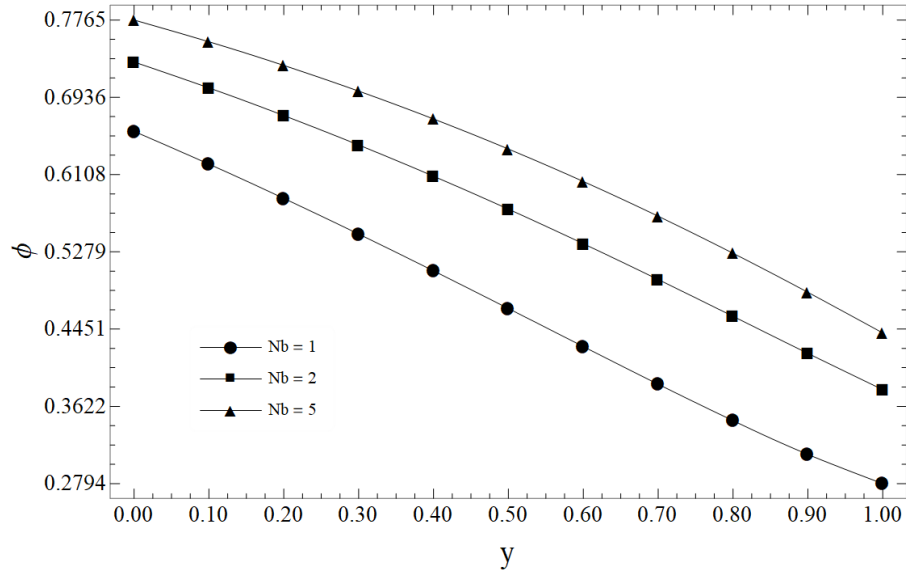


Figura 4.11: Perfiles de concentración $\phi(y)$ para distintos valores de difusión browniana Nb con $Nt = 0.6$.

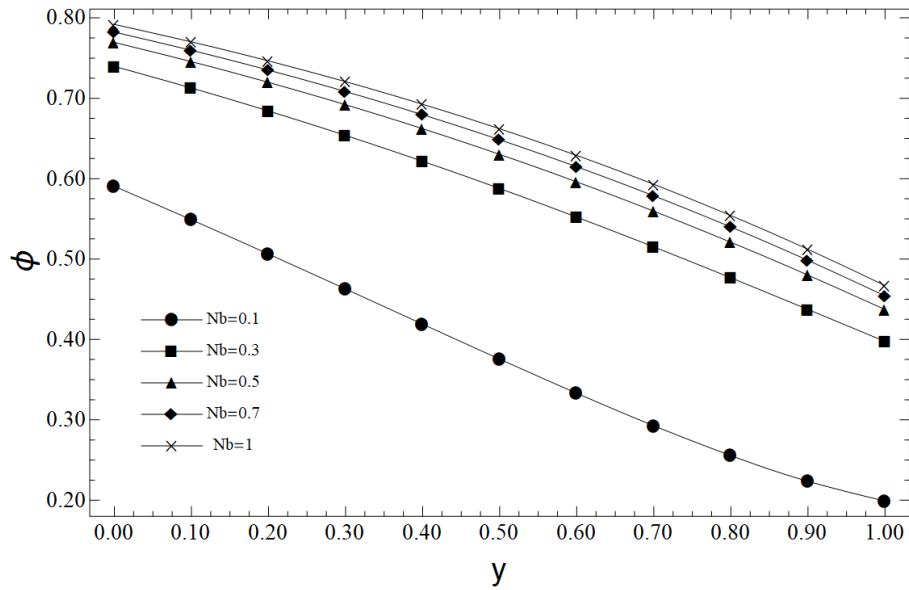


Figura 4.12: Perfil de concentración adimensional $\phi(y)$ para distintos valores de Nb .

parámetro de difusión browniana Nb . En todos los casos, la concentración decrece desde la placa inferior hacia la placa superior, lo cual es consistente con la presencia de gradientes de concentración impuestos en las paredes. Se observa además que, para una posición transversal fija, $\phi(y)$ aumenta al incrementar Nb , indicando que la intensificación de la difusión browniana tiende a elevar el nivel de concentración en el dominio y a modificar el espesor efectivo de la capa límite de concentración.

De manera complementaria, la Figura 4.13 presenta $\phi(y)$ para tres valores del número de Lewis Le , manteniendo fijo $Nb = 0.6$. Se aprecia que el incremento de Le se asocia con niveles más altos de concentración en todo el canal. En términos físicos, esto sugiere una modificación importante del balance entre transporte difusivo y advección transversal, lo que se refleja en variaciones sistemáticas del perfil de concentración y del espesor de la región de gradiente pronunciado.

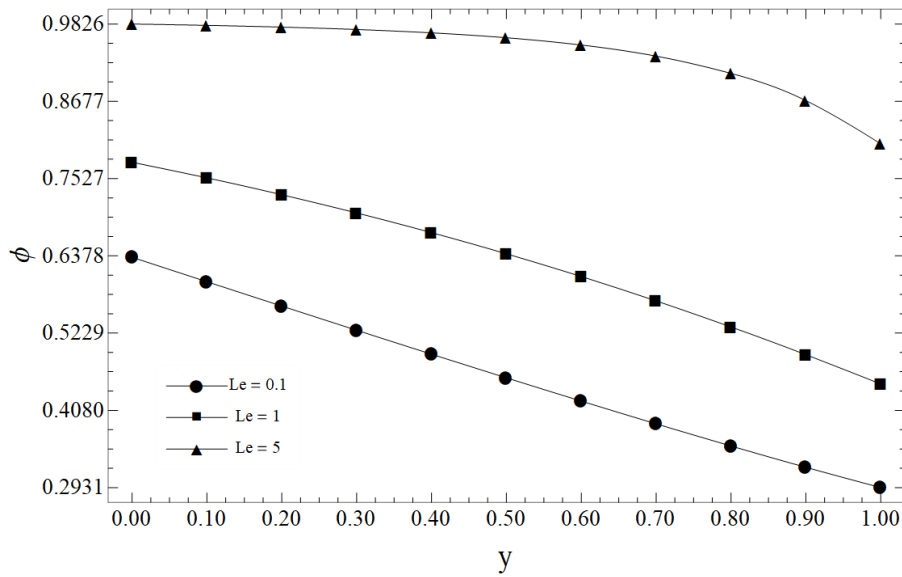


Figura 4.13: Perfil de concentración adimensional $\phi(y)$ para distintos valores de Le , con $Nb = 0.6$.

Finalmente, la Figura 4.14 muestra el efecto del número de Reynolds Re sobre $\phi(y)$, manteniendo fijo $Nb = 0.6$. Se observa que al incrementar Re la concentración aumenta en todo el dominio, lo cual indica que el transporte convectivo asociado al flujo favorece perfiles de concentración más elevados. Este resultado evidencia la sensibilidad de la transferencia de masa a la intensidad del movimiento del fluido, particularmente cuando los mecanismos difusivos están acoplados con termoforesis y difusión browniana.

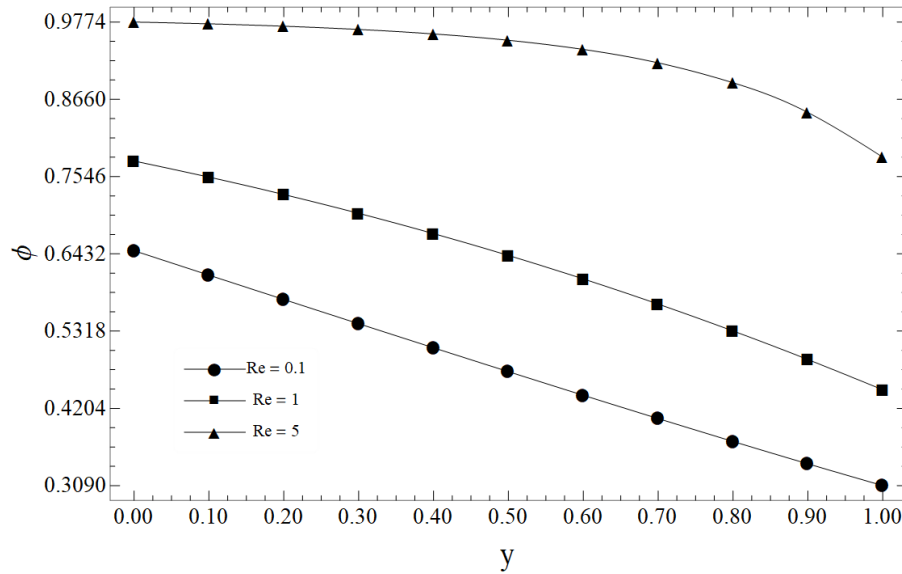


Figura 4.14: Perfil de concentración adimensional $\phi(y)$ para distintos valores de Re , con $Nb = 0.6$.

4.4. Producción de entropía

En esta sección se caracteriza la generación de entropía del sistema como indicador directo de irreversibilidades térmicas, viscosas, óhmicas y difusivas. El análisis se realiza mediante los perfiles de entropía local $S(y)$ y el valor de entropía global $\langle S \rangle$, con el fin de identificar regiones del canal donde las pérdidas irreversibles se intensifican y establecer tendencias integrales bajo variaciones paramétricas. En particular, se evalúa el efecto de Γ y parámetros asociados al transporte de cantidad de movimiento (Da , Ha , Ec), así como la influencia de los mecanismos radiativos (Rd , Nr , Pr) y de transferencia de masa acoplada (Nt , Nb , Le , Re) sobre la producción entrópica del sistema.

La Figura 4.15 muestra el perfil de entropía local $S(y)$ para los mismos valores de Γ considerados en la Figura 4.1. En todos los casos, la entropía crece de forma monótona desde la placa inferior hasta la placa superior, reflejando que las irreversibilidades son más intensas en la región cercana a la pared superior, donde los gradientes térmicos y de velocidad son mayores. El recuadro insertado permite apreciar que, aunque los perfiles son muy cercanos, un incremento de Γ produce un ligero aumento de $S(y)$ en todo el dominio.

Este comportamiento está directamente ligado a la dinámica descrita en la Figura 4.1: al aumentar Γ , la reducción del efecto de esfuerzo acoplado incrementa la velocidad y los gradientes de velocidad, lo cual intensifica la disipación viscosa, el calentamiento óhmico y la fricción porosa (términos proporcionales a u , u^2 , u^3 y $(du/dy)^2$ en la ecuación de entropía). Sin embar-

go, la separación entre las curvas es pequeña porque la contribución dominante a la entropía sigue siendo la conducción–radiación térmica, que depende principalmente de los gradientes de temperatura, los cuales apenas se alteran al variar Γ dentro del rango considerado.

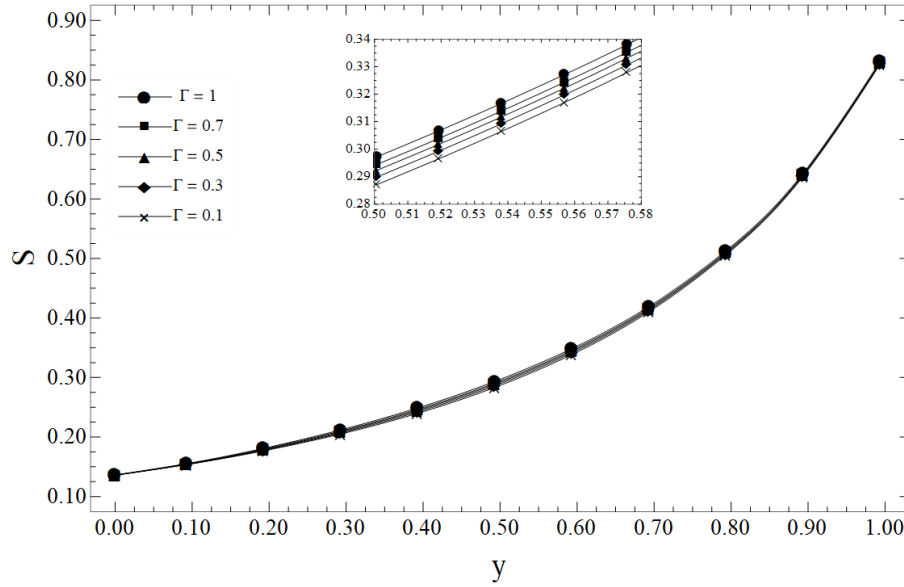


Figura 4.15: Perfil de entropía local $S(y)$ para distintos valores de Γ .

En la Figura 4.16 se presenta la entropía global $\langle S \rangle$ en función de Γ para tres valores de Darcy. Se observa, en primer lugar, que $\langle S \rangle$ aumenta casi linealmente con Γ para cualquier Da . Este incremento se explica por el efecto combinado descrito anteriormente: al crecer Γ se debilita el esfuerzo acoplado, la velocidad se incrementa (Figuras 4.1 y 4.2) y se refuerzan los mecanismos irreversibles ligados al movimiento del fluido (disipación viscosa, fricción de Darcy–Forchheimer y calentamiento óhmico), lo que se traduce en una mayor producción de entropía integrada en todo el canal. Por otro lado, para un valor fijo de Γ , la entropía global es mayor cuando el número de Darcy es más grande. Un Da elevado implica una mayor permeabilidad del medio poroso, es decir, una menor resistencia de arrastre; el flujo se acelera y los términos dependientes de u y sus derivadas en la ecuación de entropía se intensifican. Aunque al disminuir Da se incrementa el término de fricción tipo Darcy, la reducción en la velocidad y en los gradientes de velocidad domina sobre ese efecto, de modo que el resultado neto es una disminución de $\langle S \rangle$ al pasar de $Da = 10$ a $Da = 0.1$.

La influencia del campo magnético sobre la entropía global se muestra en la Figura 4.17, donde se grafica $\langle S \rangle$ en función de Γ para tres valores de Ha . Para cada valor de Ha se observa un incremento casi lineal de $\langle S \rangle$ al aumentar Γ . Por otra parte, para un Γ fijo la entropía global disminuye al incrementar el número de Hartmann. Aunque la presencia de un campo magnético más intenso incrementa la contribución de calentamiento óhmico (término proporcional a

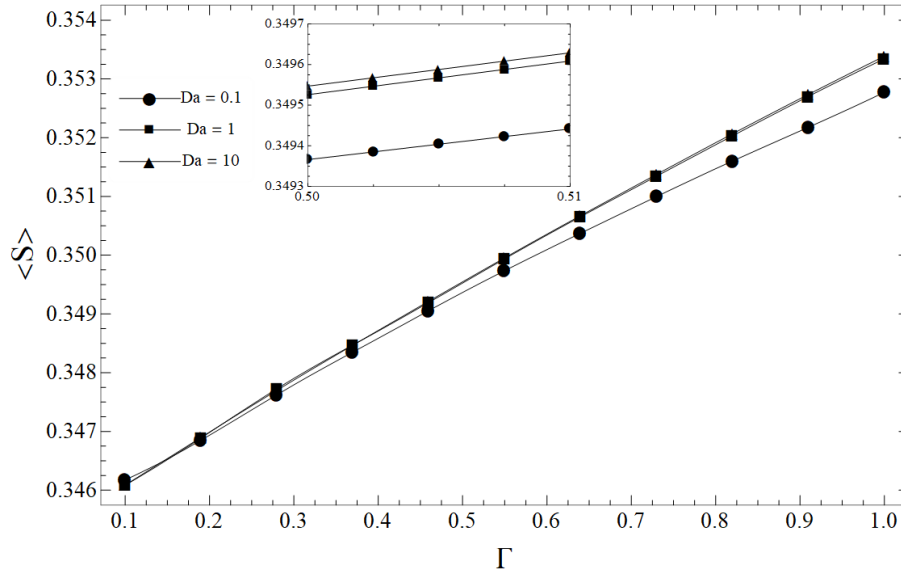


Figura 4.16: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Γ para distintos valores de Da .

$Ha^2 u^2$ en la ecuación de entropía), el efecto predominante es la reducción de la velocidad y de los gradientes de velocidad inducida por la fuerza de Lorentz (Figura 4.3). En conjunto, la disipación viscosa, la fricción tipo Darcy–Forchheimer y el calentamiento óhmico asociados al movimiento del fluido se debilitan lo suficiente para que la entropía total integrada en el canal sea menor cuando Ha aumenta de 0.1 a 5.

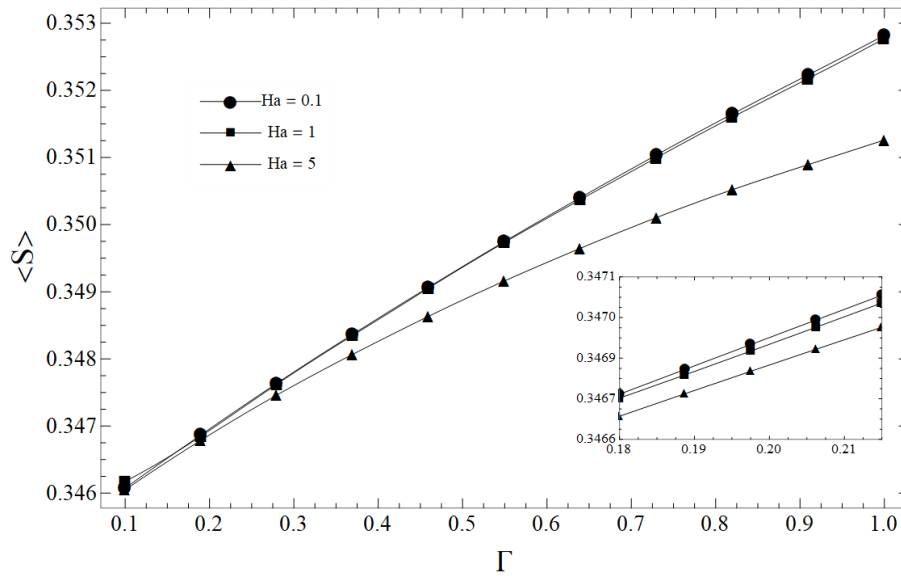


Figura 4.17: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Γ para distintos valores de Hartmann Ha .

Un aspecto relevante es el efecto conjunto de Γ y de Eckert sobre la entropía local. En la Fi-

gura 4.18 se presenta el perfil $S(y)$ para los mismos valores de Γ considerados previamente, fijando nuevamente $Ec = 10$.

En comparación con el caso $Ec = 1$, la separación entre curvas es mucho más notoria: para todo y , la entropía local aumenta de forma significativa al incrementar Γ . Este resultado se explica por la combinación de dos efectos. Por un lado, un número de Eckert elevado amplifica las contribuciones de disipación viscosa y calentamiento óhmico en la ecuación de energía, de modo que una mayor fracción de la energía cinética del flujo se transforma en calor interno. Por otro lado, como se discutió en el comportamiento dinámico, al aumentar Γ se incrementan tanto la velocidad como los gradientes de velocidad, lo que refuerza los términos disipativos en la ecuación de generación de entropía, especialmente los asociados a $(du/dy)^2$, u^2 y u^3 . El resultado conjunto es un incremento marcado de $S(y)$, en particular hacia la placa superior, donde los gradientes térmicos y de velocidad son más intensos.

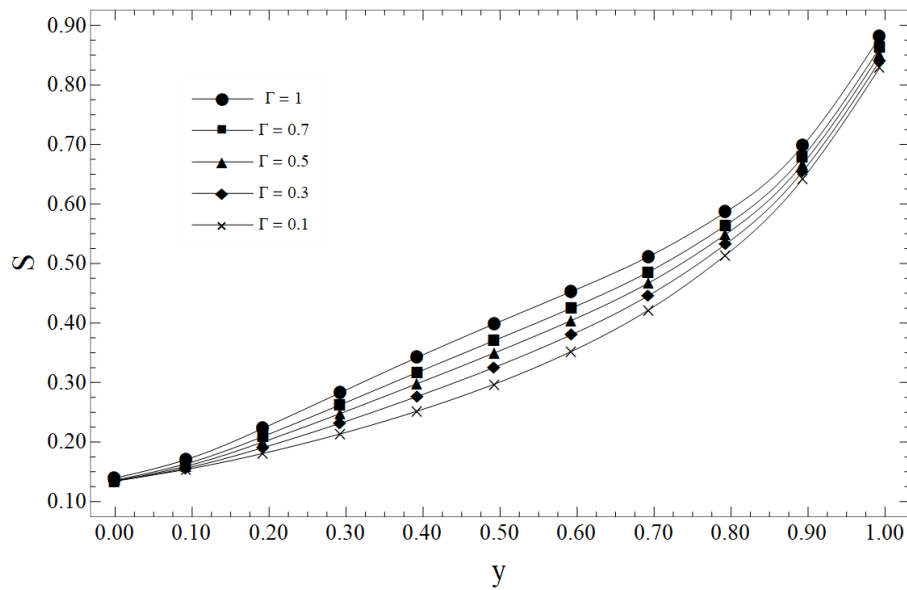


Figura 4.18: Entropía local $S(y)$ para distintos valores de Γ , con $Ec = 10$.

La Figura 4.19 resume el efecto del parámetro de Eckert Ec sobre la entropía global $\langle S \rangle$ en función de Γ . Para $Ec = 0.1$ y $Ec = 1$, la variación de $\langle S \rangle$ con Γ es relativamente suave, lo que indica que, en ese rango, las irreversibilidades están dominadas por la conducción–radiación térmica y por la fricción hidrodinámica, mientras que la disipación viscosa aporta sólo una contribución moderada. En contraste, para $Ec = 10$ la entropía global aumenta de manera marcada al incrementar Γ , evidenciando que la disipación viscosa se convierte en un mecanismo de producción de entropía dominante cuando el calentamiento interno del fluido es intenso. Desde el punto de vista de optimización, estos resultados sugieren que, en regímenes con valores elevados de Ec , es necesario limitar simultáneamente la intensidad del esfuerzo acoplado (a través

de Γ) y la velocidad del flujo para mantener la producción de entropía en niveles aceptables.

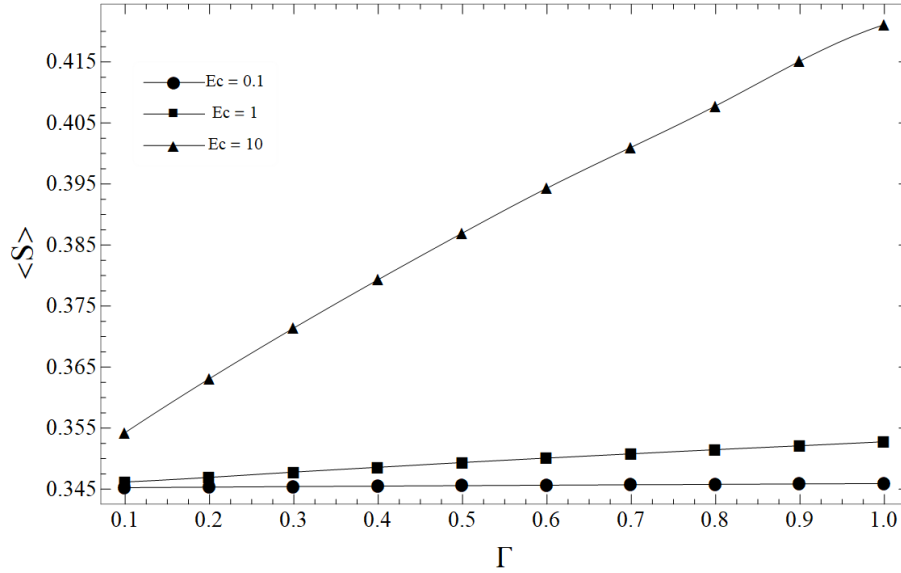
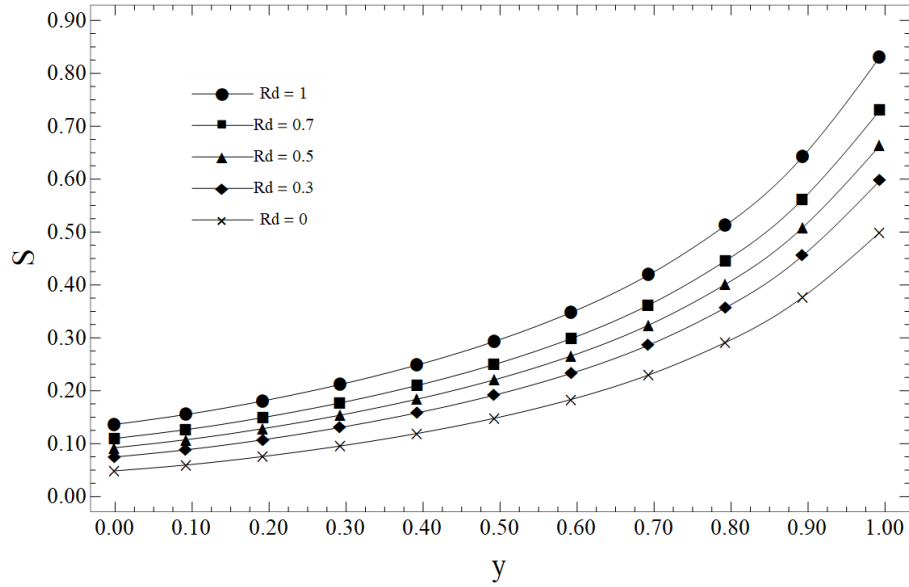
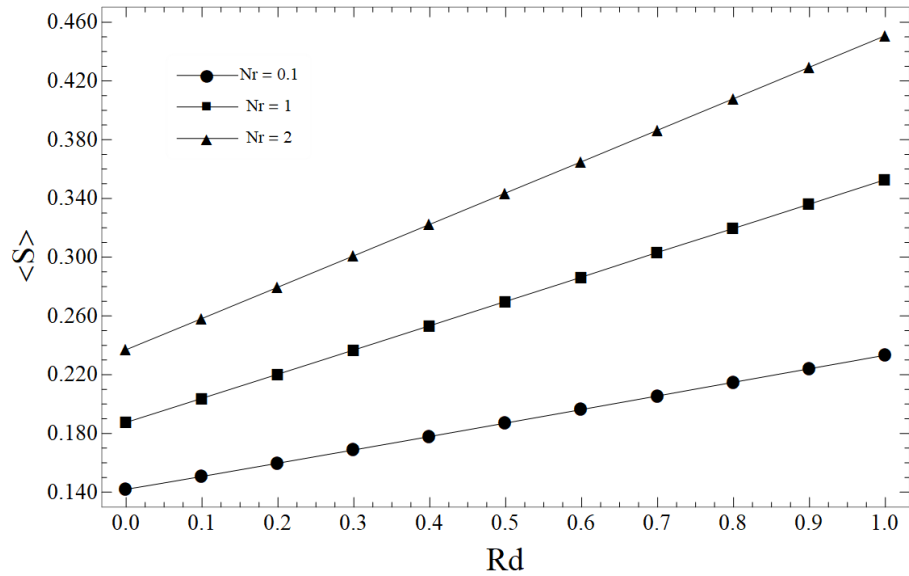


Figura 4.19: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Γ para distintos valores de Ec .

La Figura 4.20 presenta la entropía local $S(y)$ para los mismos valores de Rd considerados en la Figura 4.5, con $Nr = 1$. En todos los casos, $S(y)$ aumenta al aproximarse a la placa superior, donde los gradientes térmicos y de velocidad son más intensos. Además, para cualquier posición en el canal, la entropía local se incrementa de manera notable al aumentar Rd . Esto refleja que una radiación térmica más intensa incrementa los flujos de energía y los gradientes de temperatura efectivos en el medio, reforzando las irreversibilidades asociadas a la conducción–radiación y a la disipación viscosa. En consecuencia, el campo de entropía local es muy sensible a la intensidad de la radiación, incluso cuando las variaciones en los perfiles de temperatura y concentración son relativamente moderadas.

La Figura 4.21 resume el efecto combinado de Rd y Nr sobre la entropía global $\langle S \rangle$. La entropía global crece casi linealmente al incrementar Rd , en concordancia con el aumento de las irreversibilidades térmicas observado en la Figura 4.20. Además, para cualquier Rd , la entropía global es mayor cuando $Nr = 1$, lo que indica que una mayor intensidad de la radiación en las fronteras incrementa de forma significativa la producción total de entropía en el canal. Estos resultados muestran que la radiación térmica, es un mecanismo clave en la generación de irreversibilidades del sistema, por lo que su control es fundamental si se busca minimizar la producción de entropía y mejorar la eficiencia exergética del dispositivo.

Figura 4.20: Entropía local $S(y)$ para distintos valores de Rd .Figura 4.21: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Rd para distintos valores de Nr .

La Figura 4.22 muestra el perfil de entropía local $S(y)$ para distintos valores de Rd , con $Pr = 3$. Se observa que $S(y)$ aumenta hacia la placa superior, indicando una intensificación de irreversibilidades en esa región donde los gradientes efectivos térmicos y disipativos son más pronunciados. Asimismo, para cualquier posición y , la entropía local aumenta al incrementar Rd , lo cual confirma que una radiación volumétrica más intensa refuerza las contribuciones irreversibles asociadas al transporte conducción–radiación y eleva la producción de entropía local.

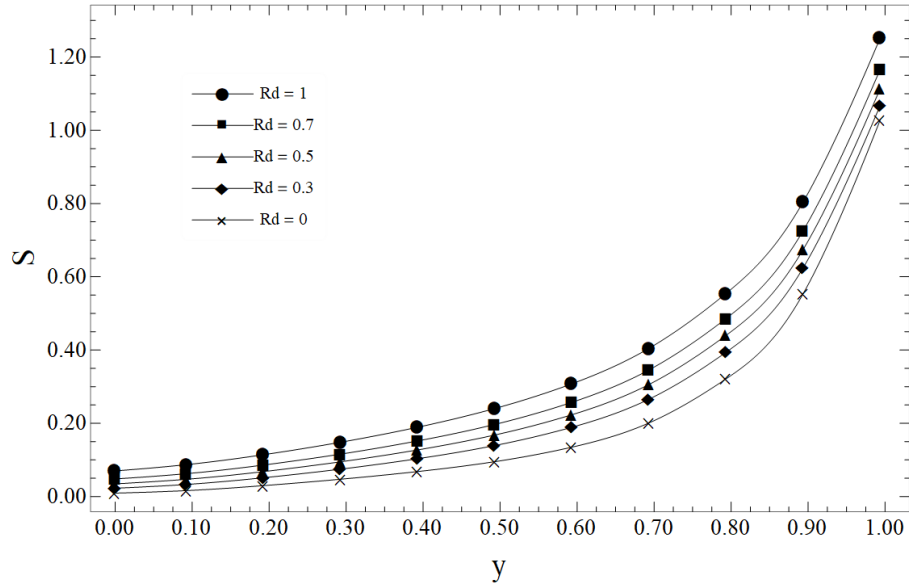


Figura 4.22: Perfil de entropía local $S(y)$ para distintos valores de Rd con $Pr = 3$.

La Figura 4.23 presenta la entropía global $\langle S \rangle$ en función de Rd para distintos valores de Pr . Se aprecia una tendencia creciente casi lineal de $\langle S \rangle$ al incrementar Rd , en concordancia con el aumento de irreversibilidades térmicas inducido por la radiación. Además, para un Rd fijo, $\langle S \rangle$ aumenta al incrementar Pr . Esto se asocia a la menor difusividad térmica efectiva cuando Pr es mayor, lo que favorece gradientes térmicos más persistentes y, por ende, una mayor producción global de entropía.

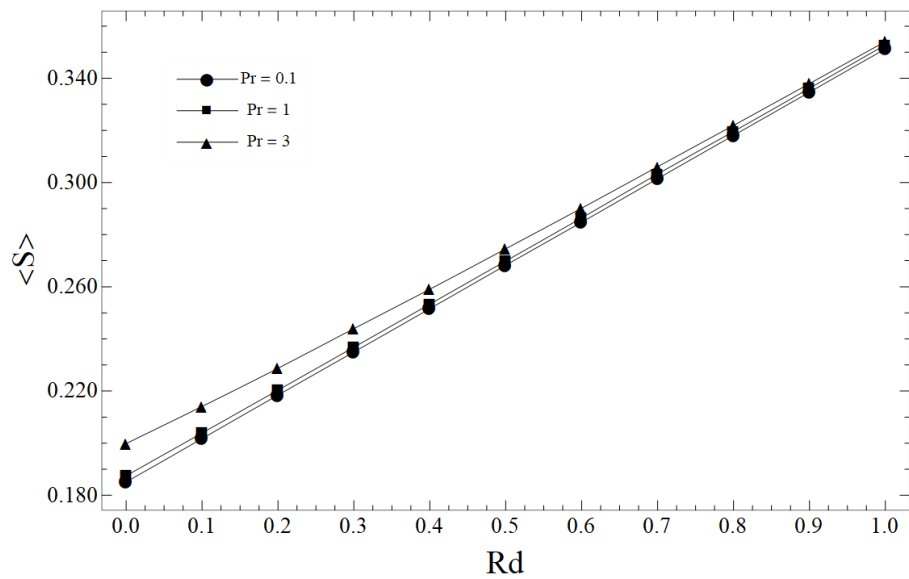


Figura 4.23: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Rd para distintos valores de Pr .

La Figura 4.24 muestra $\langle S \rangle$ en función de Rd para distintos valores de Ec . En todos los casos, $\langle S \rangle$ aumenta al incrementar Rd , reafirmando el papel dominante de la radiación volumétrica. Para un Rd fijo, $\langle S \rangle$ tiende a ser mayor cuando Ec aumenta, ya que un Eckert más elevado intensifica los mecanismos disipativos (conversión de energía mecánica en calor interno), incrementando las pérdidas irreversibles integradas en el canal.

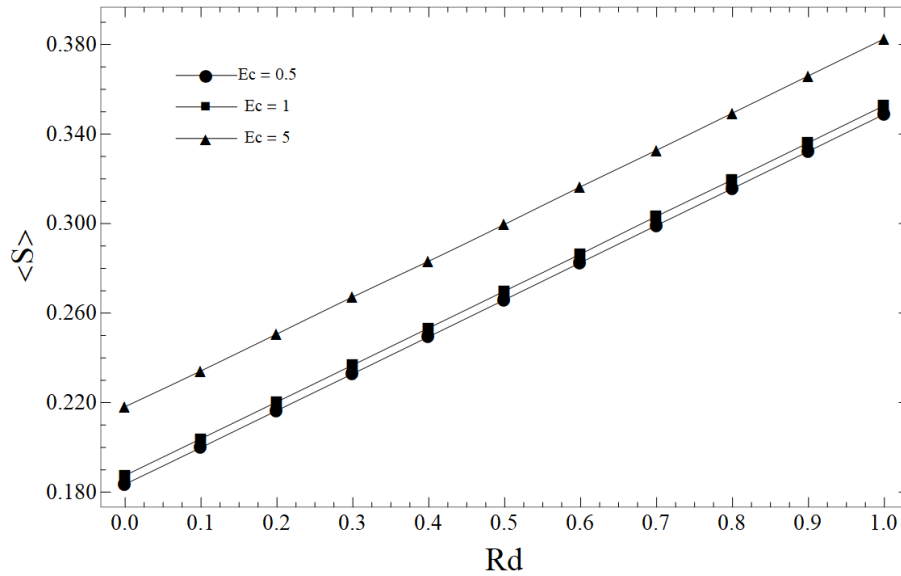


Figura 4.24: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Rd para distintos valores de Ec .

A continuación, se analiza la sensibilidad de la producción de entropía ante los mecanismos de transporte de masa asociados a termoforesis y difusión browniana.

La Figura 4.25 muestra la entropía local $S(y)$ para distintos valores de Nt , manteniendo fijo $Nb = 1$. En general, $S(y)$ se incrementa hacia la placa superior, lo cual evidencia que las irreversibilidades son más intensas en la región donde los gradientes térmicos y de transporte se refuerzan. Sin embargo, el efecto de Nt no es estrictamente uniforme en todo el dominio: las curvas se mantienen muy cercanas entre sí y el recuadro ampliado permite apreciar una inversión sutil en la jerarquía de los perfiles cerca de la pared superior. Este comportamiento sugiere una competencia entre contribuciones irreversibles asociadas a gradientes térmicos y a gradientes de concentración, donde el incremento de Nt modifica el balance difusivo-termoforético y puede intensificar o atenuar localmente la producción de entropía dependiendo de la región transversal considerada.

La tendencia global se resume en la Figura 4.26, donde se presenta la entropía global $\langle S \rangle$ como función de Nt para distintos valores de Nb . Se observa que, para cualquier Nb , $\langle S \rangle$ aumenta al incrementar Nt , indicando que una termoforesis más intensa tiende a reforzar la producción

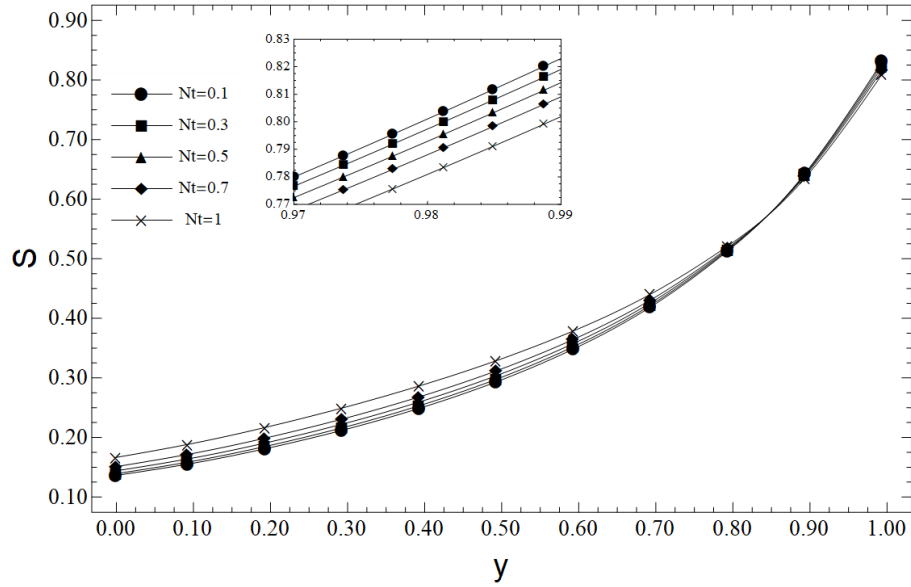


Figura 4.25: Entropía local $S(y)$ para distintos valores de termoforesis Nt con $Nb = 1$.

total de entropía del sistema. Por otro lado, para un Nt fijo, $\langle S \rangle$ disminuye al aumentar Nb . Esto refleja que una difusión browniana más intensa suaviza gradientes de concentración y reduce la contribución irreversible asociada al transporte másico, lo que se traduce en una menor producción de entropía integrada en el canal. En términos de diseño y operación, estos resultados sugieren que la combinación de Nt elevado con Nb reducido puede conducir a regímenes con mayores pérdidas irreversibles.

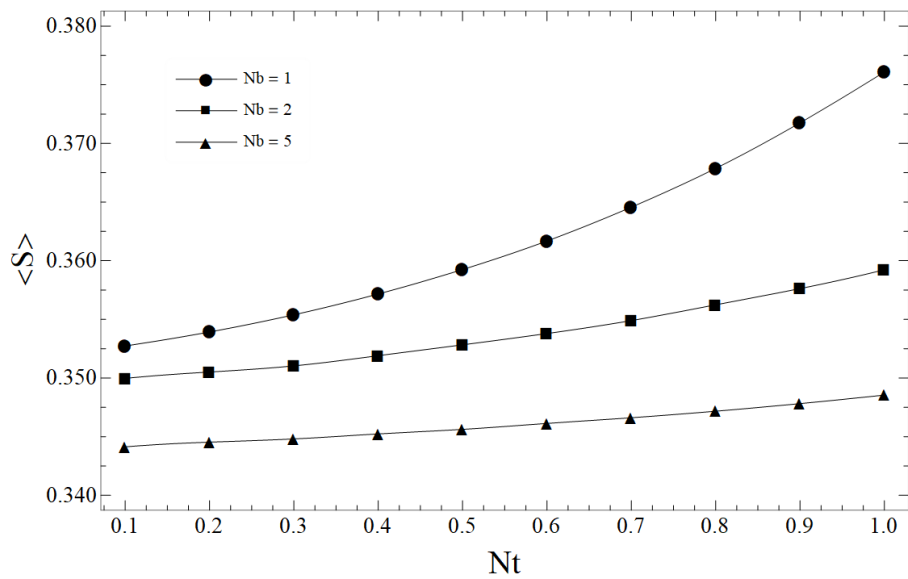


Figura 4.26: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Nt para distintos valores de Nb .

La Figura 4.27 muestra la entropía local $S(y)$ para distintos valores de Nb . En todos los casos, $S(y)$ aumenta hacia la placa superior, lo que confirma que las irreversibilidades se intensifican en la región donde los gradientes térmicos y de transporte son más altos. Adicionalmente, se observa una sensibilidad apreciable de $S(y)$ a Nb , con diferencias que dependen de la posición transversal. Esto sugiere una competencia entre mecanismos irreversibles de naturaleza térmica y difusiva, de modo que la contribución neta de Nb sobre la generación de entropía puede variar a lo largo del canal.

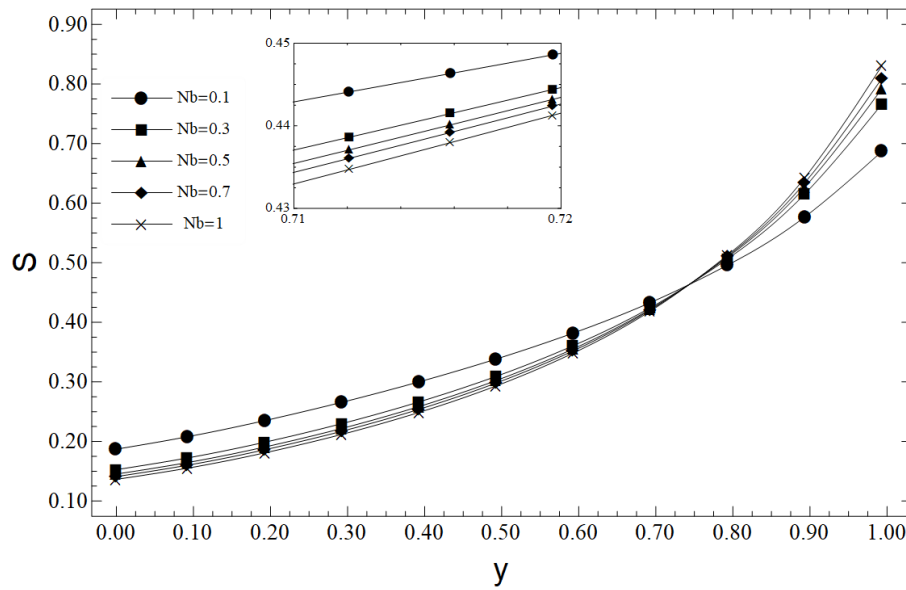


Figura 4.27: Entropía local $S(y)$ para distintos valores de Nb .

El efecto global del transporte de masa acoplado se resume en la Figura 4.28, donde se representa la entropía global $\langle S \rangle$ en función de Nb para distintos valores de Le . Se aprecia una disminución de $\langle S \rangle$ al incrementar Nb , con una tendencia a estabilizarse para valores grandes. Además, para cualquier Nb , la entropía global es menor cuando Le es mayor, lo que indica que la combinación de parámetros difusivos puede reducir las irreversibilidades integradas del sistema.

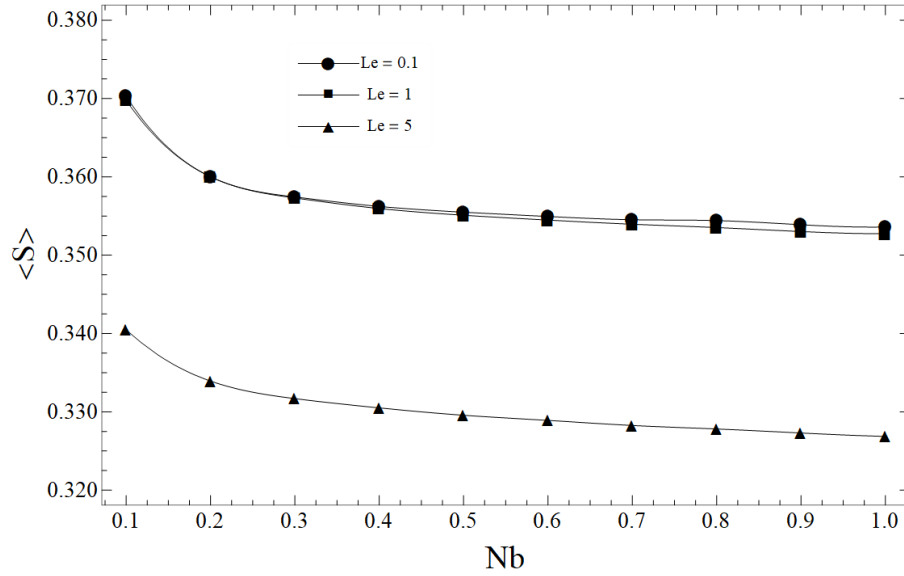


Figura 4.28: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Nb para distintos valores de Le .

De manera complementaria, la Figura 4.29 muestra $\langle S \rangle$ en función de Nb para distintos valores de Re . Se observa que $\langle S \rangle$ disminuye al aumentar Re , lo cual sugiere que, en el régimen analizado, el incremento del transporte convectivo altera el balance de mecanismos irreversibles de forma que la producción de entropía global se reduce. Asimismo, para cada Re , $\langle S \rangle$ decrece con Nb , confirmando que Nb es un parámetro clave en la modulación de irreversibilidades cuando existe transporte de nanopartículas acoplado.

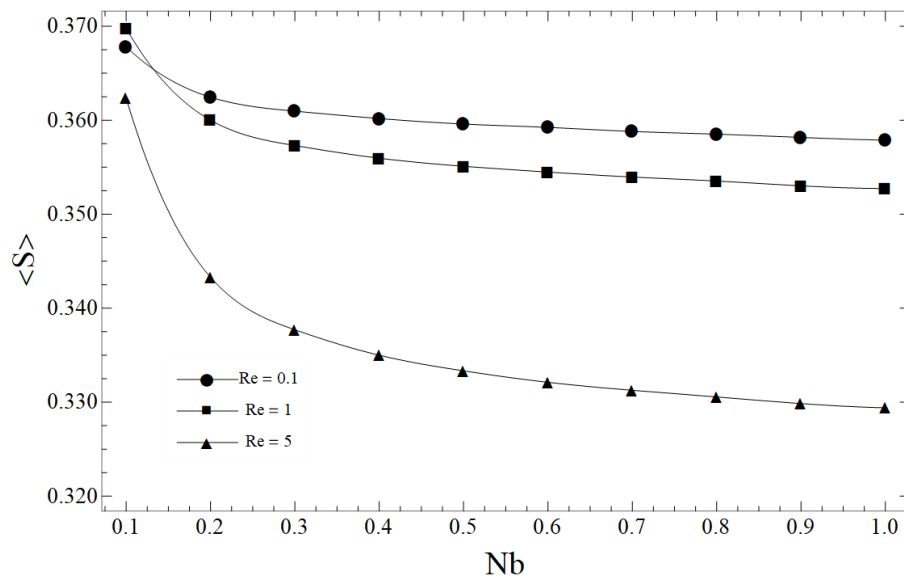


Figura 4.29: Entropía global $\langle S \rangle$ en función de Nb para distintos valores de Re .

4.5. Coeficiente de fricción

De acuerdo con las definiciones establecidas en el Capítulo 3, se analiza el coeficiente de fricción en ambas placas para evaluar la respuesta hidráulica del sistema.

4.5.1. Coeficiente de fricción en la placa inferior

La Figura 4.30 muestra la variación de $C_{fy=0}$ con Γ para tres valores del número de Darcy. Los valores de $C_{fy=0}$ son positivos, lo que indica que la tensión cortante está alineada con el movimiento del fluido en la placa inferior. Se observa que $C_{fy=0}$ aumenta de manera casi lineal al incrementar Γ para cualquier Da . Este comportamiento es consistente con la Figura 4.1 al crecer Γ , la reducción del efecto de esfuerzo acoplado aumenta el gradiente de velocidad en la vecindad de la pared inferior, de modo que la tensión cortante y, por ende, el coeficiente de fricción, se incrementan.

Además, para un Γ fijo, el coeficiente de fricción resulta mayor cuando Da es más grande. Un Da elevado corresponde a un medio más permeable y menos restrictivo, lo cual favorece velocidades más altas y gradientes de velocidad más pronunciados junto a la placa; como consecuencia, la interacción viscosa fluido–pared se intensifica y $C_{fy=0}$ toma valores más grandes. El recuadro en la figura confirma que, aunque la separación entre curvas es moderada, la tendencia $C_{fy=0}(Da = 0.1) < C_{fy=0}(Da = 1) < C_{fy=0}(Da = 10)$ se mantiene en todo el intervalo de Γ .

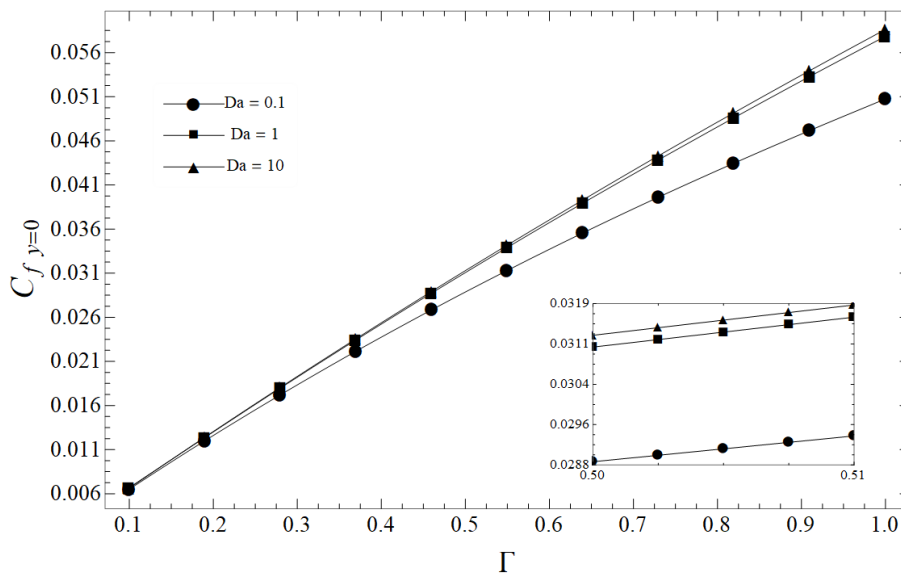


Figura 4.30: Coeficiente de fricción en la placa inferior, $C_{fy=0}$, en función de Γ para distintos valores de Da .

El efecto del campo magnético sobre el coeficiente de fricción en la placa inferior se ilustra en la Figura 4.31, donde se representa $C_{f,y=0}$ frente a Γ para diferentes valores de Ha . En todos los casos, $C_{f,y=0}$ crece con Γ , lo que coincide con el aumento del gradiente de velocidad en la pared cuando el esfuerzo acoplado se debilita.

Para un valor dado de Γ , el coeficiente de fricción disminuye al incrementar Ha . Este resultado es coherente con la reducción de la velocidad y de los gradientes de velocidad mostrada en la Figura 4.3. La fuerza de Lorentz inducida por el campo magnético atenúa el movimiento del nanofluido, de modo que la cizalla en la vecindad de la placa inferior se reduce y la tensión cortante fluido–pared se hace menor. En consecuencia, $C_{f,y=0}$ toma valores más pequeños cuando el campo magnético es más intenso.

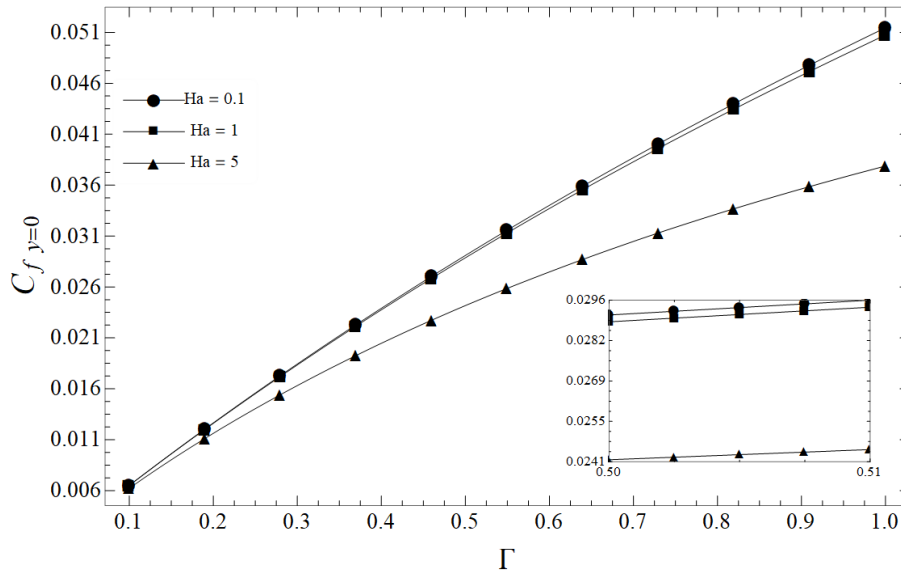


Figura 4.31: Coeficiente de fricción en la placa inferior, $C_{f,y=0}$, en función de Γ para distintos valores de Hartmann Ha .

Finalmente, se analiza el efecto del parámetro de Eckert sobre la fricción en la placa inferior. La Figura 4.32 muestra la variación de $C_{f,y=0}$ con Γ para tres valores de Ec . Se observa que, para cada valor de Γ , las curvas correspondientes a $Ec = 0.1$, $Ec = 1$ y $Ec = 10$ prácticamente se superponen, y el coeficiente de fricción aumenta casi linealmente con Γ independientemente de Ec .

Este resultado es consistente con la formulación del modelo; Ec aparece únicamente en la ecuación de energía ponderando los términos disipativos, por lo que modifica principalmente la distribución de temperatura y la producción de entropía, pero no entra de manera directa en la ecuación de momento. Cualquier influencia de Ec sobre $C_{f,y=0}$ sería indirecta, a través de varia-

ciones en las propiedades termofísicas con la temperatura, por lo que en el rango de parámetros considerado el efecto sobre la fricción viscosa es prácticamente despreciable.

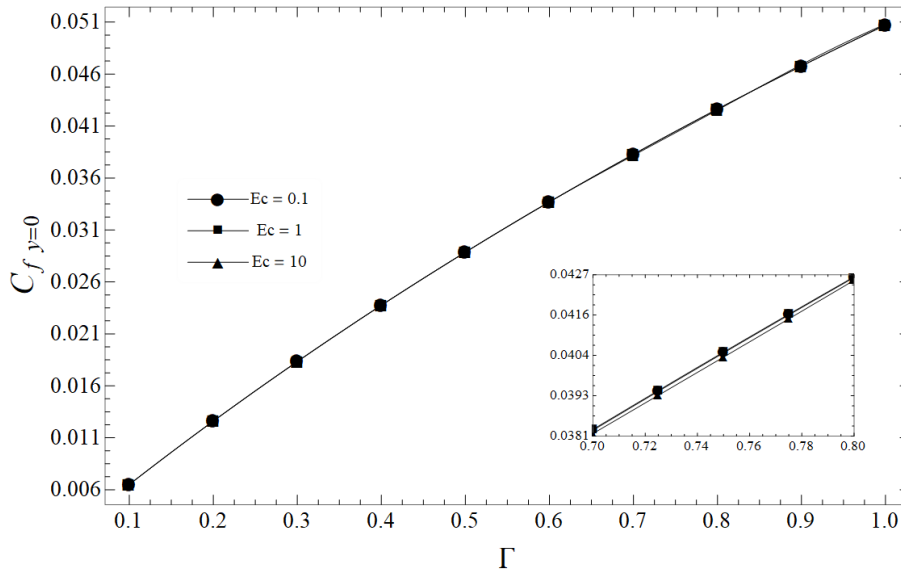


Figura 4.32: Coeficiente de fricción en la placa inferior, $C_{fy=0}$, en función de Γ para distintos valores de Ec .

4.5.2. Coeficiente de fricción en la placa superior

En la Figura 4.33 se presenta el coeficiente de fricción evaluado en la placa superior, $C_{fy=1}$, para los mismos valores de Γ y Da . En este caso los valores de $C_{fy=1}$ son negativos, lo que indica que la tensión cortante actúa en sentido opuesto al movimiento principal del fluido en la pared superior, consistente con la presencia de succión en esa placa y con la forma del perfil de velocidad.

Al igual que en la placa inferior, el valor absoluto de $C_{fy=1}$ crece al aumentar Γ : la disminución del efecto de esfuerzo acoplado incrementa los gradientes de velocidad cerca de la pared superior, lo que refuerza la tensión cortante y hace que el coeficiente de fricción se vuelva más negativo. Asimismo, para un Γ fijo, el módulo de $C_{fy=1}$ es mayor cuando Da es más grande, reflejando que un medio más permeable permite mayor aceleración del flujo y, en consecuencia, mayor cizalladura en la interfase fluido–pared.

Comparando las Figuras 4.30 y 4.33 se observa que los valores de $|C_{fy=1}|$ son ligeramente superiores a $C_{fy=0}$, lo que indica que la interacción viscosa es algo más intensa en la placa superior. Esta asimetría es coherente con las condiciones de succión en la pared superior y de inyección en la placa inferior, que desplazan el máximo del perfil de velocidad hacia la parte

alta del canal.

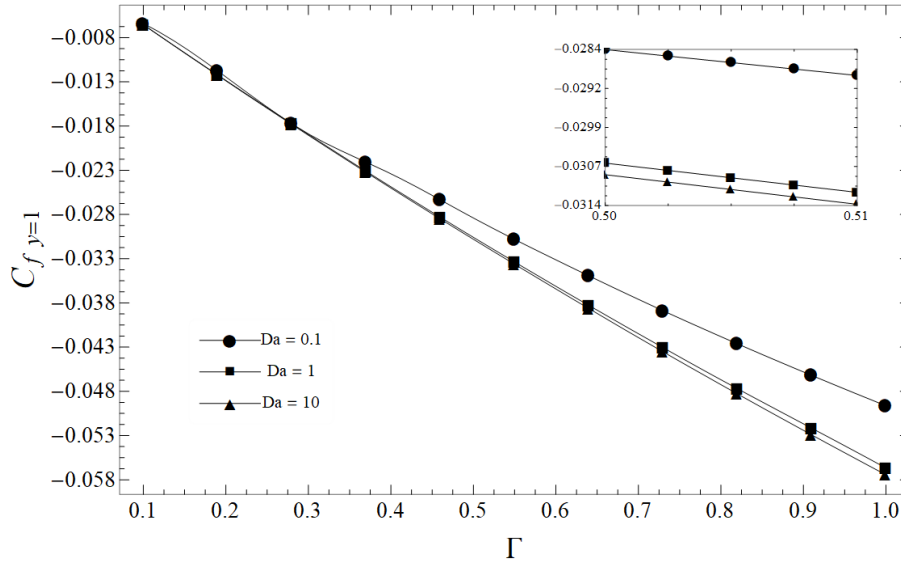


Figura 4.33: Coeficiente de fricción en la placa superior, $C_{fy=1}$, en función de Γ para distintos valores de Da .

La Figura 4.34 muestra la variación del coeficiente de fricción en la placa superior $C_{fy=1}$ con Γ para los tres valores considerados de Ha . Los valores siguen siendo negativos, lo que indica que la tensión cortante permanece opuesta al movimiento principal del fluido en esta pared. Al aumentar Γ , el módulo de $C_{fy=1}$ crece para cualquier Ha , en concordancia con el incremento del gradiente de velocidad cerca de la placa superior cuando el efecto de esfuerzo acoplado se debilita.

Por otro lado, para un Γ fijo se observa que el valor absoluto de $C_{fy=1}$ disminuye conforme el número de Hartmann aumenta. Es decir, un campo magnético más intenso reduce la magnitud de la tensión cortante en la pared superior, de manera análoga a lo observado en la placa inferior. La fuerza de Lorentz amortigua la velocidad, de modo que el coeficiente de fricción se vuelve menos negativo al pasar de $Ha = 0.1$ a $Ha = 5$.

De forma análoga, la Figura 4.35 ilustra el comportamiento del coeficiente de fricción en la placa superior, $C_{fy=1}$, en función de Γ para los mismos valores de Ec . Los valores de $C_{fy=1}$ son negativos en todo el intervalo, lo que confirma que la tensión cortante está dirigida en sentido opuesto al movimiento principal del fluido sobre esta pared. El módulo de $C_{fy=1}$ crece casi linealmente con Γ , reflejando el incremento de los gradientes de velocidad cerca de la placa superior cuando el efecto de esfuerzo acoplado se debilita.

Al igual que en la placa inferior, las curvas asociadas a $Ec = 0.1$, $Ec = 1$ y $Ec = 10$ son prácti-

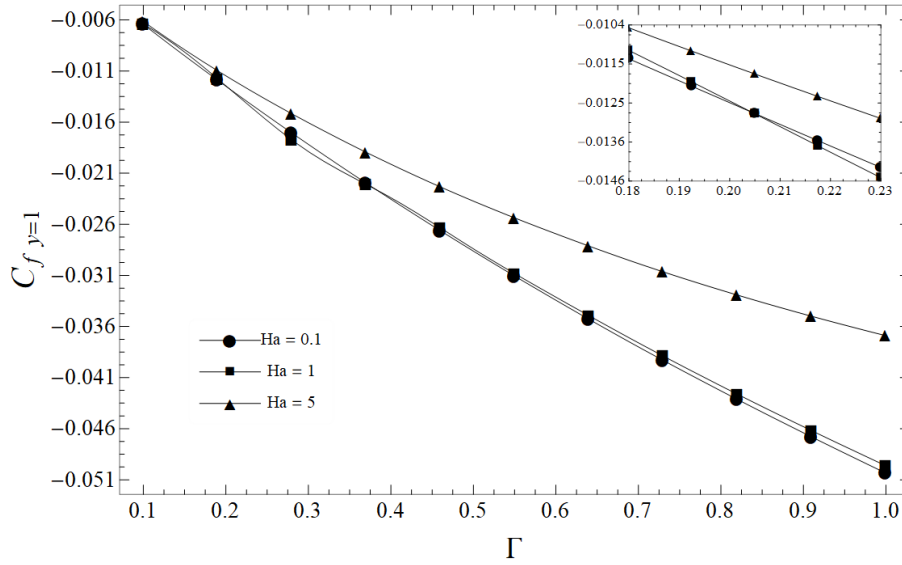


Figura 4.34: Coeficiente de fricción en la placa superior, $C_{f,y=1}$, en función de Γ para distintos valores del número de Hartmann Ha .

camente indistinguibles, lo que indica que el parámetro de Eckert tiene un efecto muy limitado sobre la fricción viscosa en la pared. En este modelo, la estructura del campo de velocidades y, por ende, del coeficiente de fricción, está gobernada principalmente por la presión impuesta, el medio poroso, el campo magnético, la succión–inyección y el esfuerzo acoplado, mientras que el calentamiento interno regulado por Ec actúa sólo como una corrección de segundo orden.

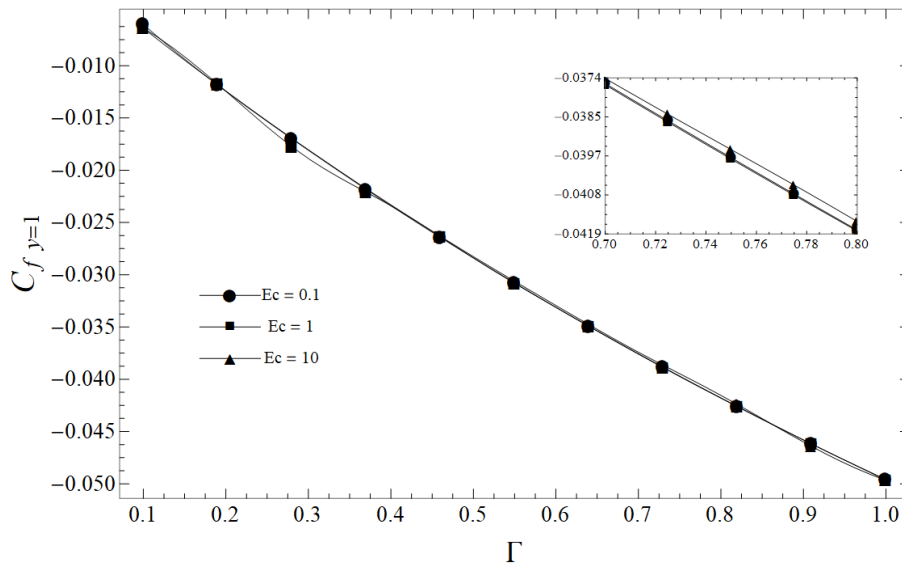


Figura 4.35: Coeficiente de fricción en la placa superior, $C_{f,y=1}$, en función de Γ para distintos valores de Ec .

4.6. Transferencia de calor: número de Nusselt

Con base en la definición del número de Nusselt introducida en el Capítulo 3, se examina la transferencia de calor en ambas placas bajo variaciones radiativas y disipativas.

4.6.1. Placa inferior

La influencia combinada de la radiación térmica no lineal Rd y del parámetro de radiación superficial Nr sobre la transferencia de calor en la placa inferior se ilustra en la Figura 4.36, donde se muestra $Nu_{y=0}$ como función de Rd para distintos valores de Nr . En todos los casos, el número de Nusselt aumenta casi linealmente al incrementar Rd , lo que indica que una radiación volumétrica más intensa refuerza el gradiente de temperatura en la vecindad de la placa caliente y, por tanto, el flujo de calor hacia la pared.

Para un mismo valor de Rd , se observa que $Nu_{y=0}$ es mayor para valores más altos de Nr , ya que una radiación más intensa en las condiciones de frontera fortalece el intercambio radiativo en la pared e incrementa el flujo de calor adimensional. En el rango analizado, las curvas correspondientes a $Nr = 1$ y $Nr = 2$ se mantienen muy cercanas, lo que sugiere un efecto de saturación del intercambio radiativo en frontera respecto a Nr . Este comportamiento es consistente con los perfiles de temperatura discutidos previamente, donde la combinación de radiación volumétrica (Rd) y superficial (Nr) intensifica los gradientes térmicos cerca de las paredes.

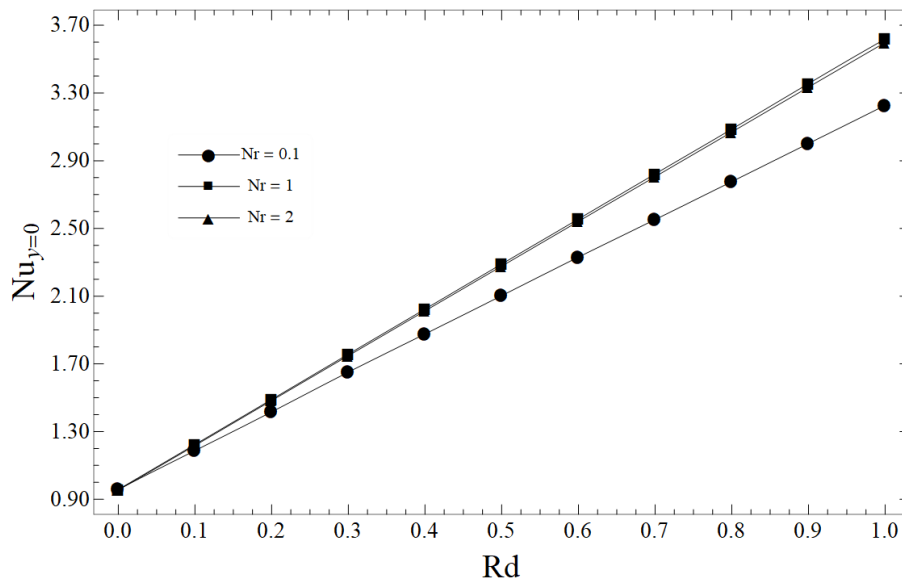


Figura 4.36: Número de Nusselt en la placa inferior, $Nu_{y=0}$, en función de Rd para distintos valores de Nr .

Adicionalmente, la Figura 4.37 muestra $Nu_{y=0}$ en función de Rd para distintos valores de Pr . Se

observa que $Nu_{y=0}$ aumenta casi linealmente con Rd , confirmando que la radiación volumétrica intensifica el gradiente térmico en la vecindad de la placa caliente. Para un Rd fijo, $Nu_{y=0}$ disminuye al incrementar Pr , lo cual es consistente con una menor difusividad térmica efectiva: al reducirse la difusión del calor, se modifica el gradiente térmico en la pared y el flujo de calor adimensional caracterizado por Nusselt disminuye.

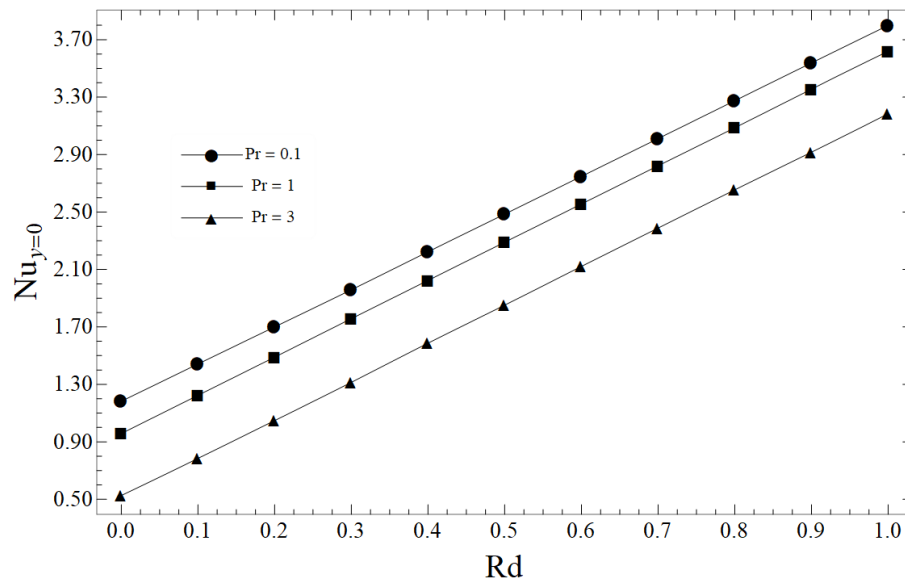


Figura 4.37: Número de Nusselt en la placa inferior, $Nu_{y=0}$, en función de Rd para distintos valores de Pr .

La Figura 4.38 presenta el efecto del número de Eckert Ec sobre $Nu_{y=0}$ en función de Rd . Se mantiene la tendencia creciente con Rd , mientras que las diferencias entre curvas para distintos Ec son moderadas. Esto indica que, en el rango analizado, el calentamiento interno asociado a Ec introduce correcciones de segundo orden frente al efecto dominante de la radiación volumétrica en la transferencia de calor en la placa inferior.

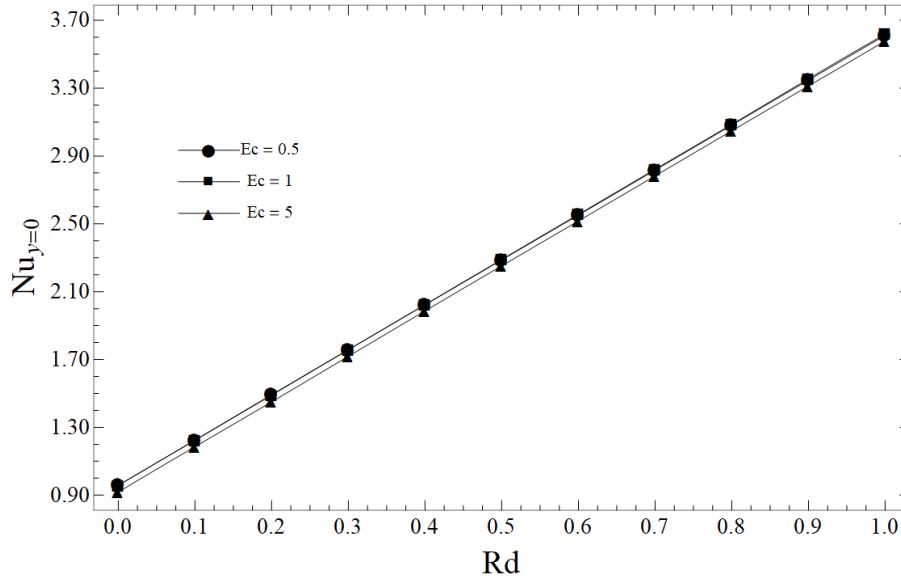


Figura 4.38: Número de Nusselt en la placa inferior, $Nu_{y=0}$, en función de Rd para distintos valores de Ec .

4.6.2. Placa superior

El efecto de la radiación sobre la transferencia de calor en la placa superior se resume en la Figura 4.39, donde se presenta $Nu_{y=1}$ en función de Rd para distintos valores de Nr . En todos los casos los valores de $Nu_{y=1}$ son negativos, lo que confirma que el flujo de calor neto está dirigido desde el fluido hacia la placa superior más fría. Además, $Nu_{y=1}$ se vuelve más negativo conforme Rd aumenta, de modo que la magnitud $|Nu_{y=1}|$ crece al intensificarse la radiación volumétrica, indicando un intercambio térmico más intenso en la pared fría.

Para un valor fijo de Rd , al incrementar Nr los valores de $Nu_{y=1}$ tienden a hacerse más negativos, lo que sugiere que una radiación superficial más intensa refuerza el gradiente térmico efectivo en la vecindad de la placa superior y aumenta el intercambio térmico con el nanofluido. En el rango analizado, las curvas para $Nr = 1$ y $Nr = 2$ permanecen muy cercanas, lo cual indica un efecto de saturación del intercambio radiativo en frontera respecto a Nr . En conjunto, las Figuras 4.36 y 4.39 muestran que la radiación térmica, tanto en el volumen como en las fronteras, actúa como un mecanismo eficaz para intensificar la transferencia de calor en ambas placas.

De manera complementaria, la Figura 4.40 muestra $Nu_{y=1}$ en función de Rd para distintos valores de Pr . Los valores negativos confirman que el flujo neto se dirige hacia la placa superior más fría. Se observa que $Nu_{y=1}$ se vuelve más negativo al aumentar Rd , es decir, la magnitud $|Nu_{y=1}|$ crece, lo que indica un intercambio térmico más intenso en la placa superior conforme la radiación volumétrica se intensifica. Para un Rd fijo, $|Nu_{y=1}|$ aumenta al incrementar Pr ,

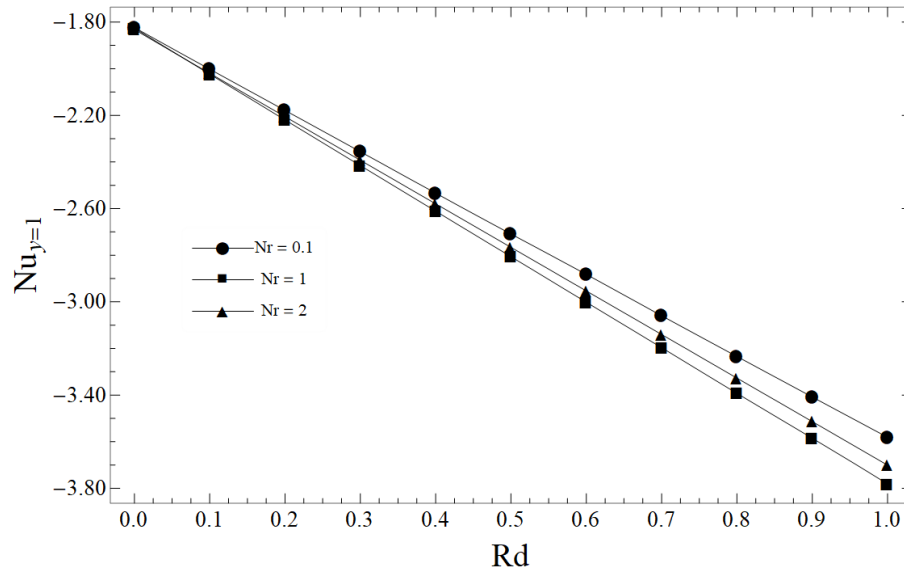


Figura 4.39: Número de Nusselt en la placa superior, $Nu_{y=1}$, en función de Rd para distintos valores de Nr .

reflejando el efecto de una menor difusividad térmica efectiva sobre los gradientes térmicos próximos a la pared fría.

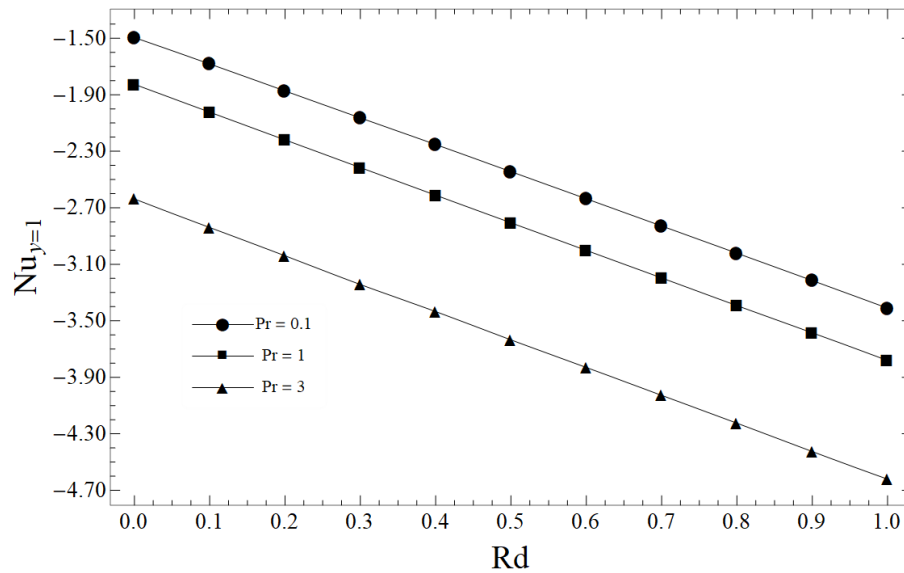


Figura 4.40: Número de Nusselt en la placa superior, $Nu_{y=1}$, en función de Rd para distintos valores de Pr .

Finalmente, la Figura 4.41 presenta $Nu_{y=1}$ en función de Rd para distintos valores de Ec . Se mantiene la tendencia de que $Nu_{y=1}$ se vuelve más negativo al aumentar Rd , por lo que $|Nu_{y=1}|$ se incrementa. El efecto de Ec es moderado, lo que sugiere que la radiación volumétrica domina

la transferencia de calor hacia la placa superior, mientras que el calentamiento interno asociado a Ec ajusta de forma secundaria la magnitud del gradiente térmico en dicha pared.

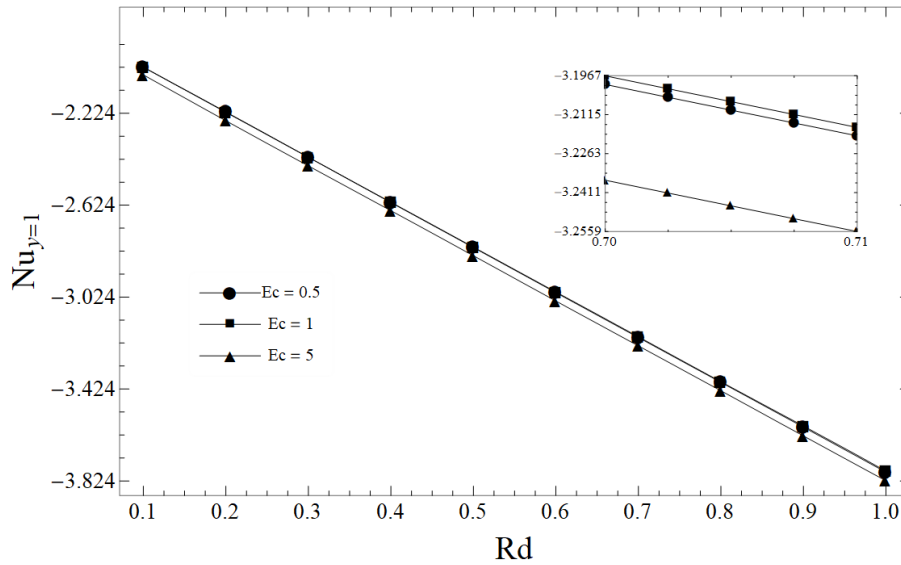


Figura 4.41: Número de Nusselt en la placa superior, $Nu_{y=1}$, en función de Rd para distintos valores de Ec .

4.7. Transferencia de masa global: número de Sherwood

Con base en la definición del número de Sherwood establecida en el Capítulo 3, se cuantifica el transporte másico entre el nanofluido y las paredes del canal.

4.7.1. Placa inferior

La Figura 4.42 muestra el número de Sherwood en la placa inferior, $Sh_{y=0}$, en función del parámetro de termoforesis Nt para distintos valores de Nb . Se observa que $Sh_{y=0}$ aumenta de manera monotonía al incrementar Nt , lo que indica un fortalecimiento del transporte másico en la vecindad de la pared inferior conforme la termoforesis se intensifica. Por otro lado, para un Nt fijo, $Sh_{y=0}$ disminuye al aumentar Nb . Este comportamiento sugiere que una difusión browniana más intensa tiende a suavizar los gradientes de concentración cerca de la pared, reduciendo el flujo másico adimensional y, en consecuencia, el número de Sherwood.

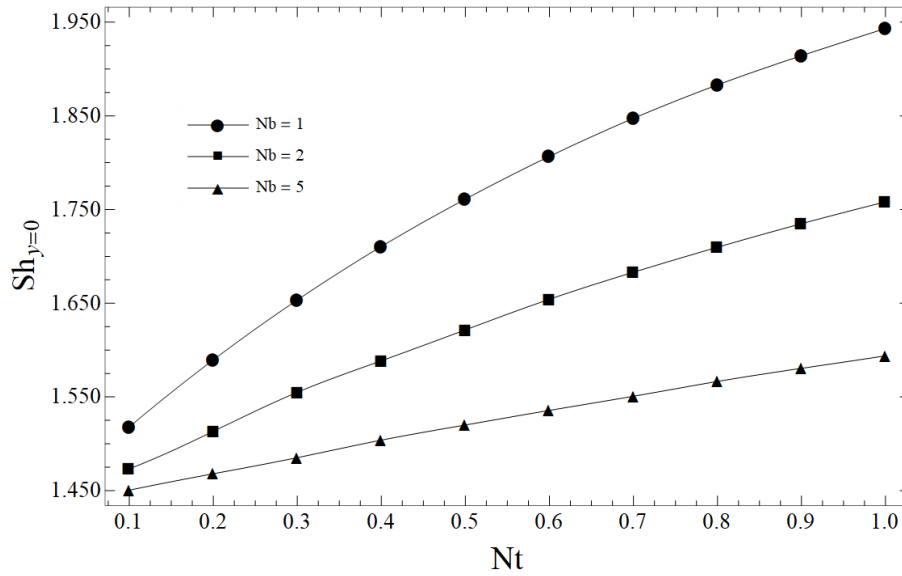


Figura 4.42: Número de Sherwood en la placa inferior $Sh_{y=0}$ en función de Nt para distintos valores de Nb .

La Figura 4.43 muestra el número de Sherwood en la placa inferior $Sh_{y=0}$ en función de Nb para distintos valores de Le . Se observa que $Sh_{y=0}$ decrece sistemáticamente al aumentar Nb , lo que indica una reducción del gradiente de concentración en la vecindad de la placa inferior, consistente con un mayor efecto difusivo browniano que tiende a suavizar los gradientes. Asimismo, para un Nb fijo, $Sh_{y=0}$ es mayor cuando Le es menor, evidenciando que la combinación de parámetros de difusión gobierna de manera directa la transferencia de masa en la pared.

El efecto de la intensidad del flujo se presenta en la Figura 4.44, donde se grafica $Sh_{y=0}$ en función de Nb para distintos valores de Re . Se observa que $Sh_{y=0}$ disminuye al incrementar Re , y también decrece al aumentar Nb . En conjunto, estos resultados muestran que tanto el reforzamiento convectivo del flujo como el incremento de la difusión browniana modifican los gradientes de concentración en la pared inferior, afectando el transporte másico global medido por Sh .

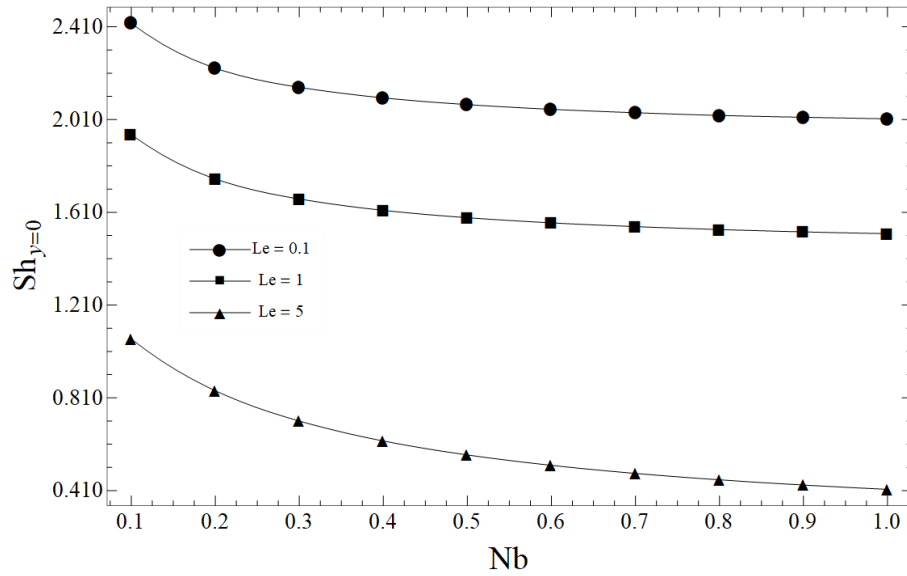


Figura 4.43: Número de Sherwood en la placa inferior $Sh_{y=0}$ en función de Nb para distintos valores de Le .

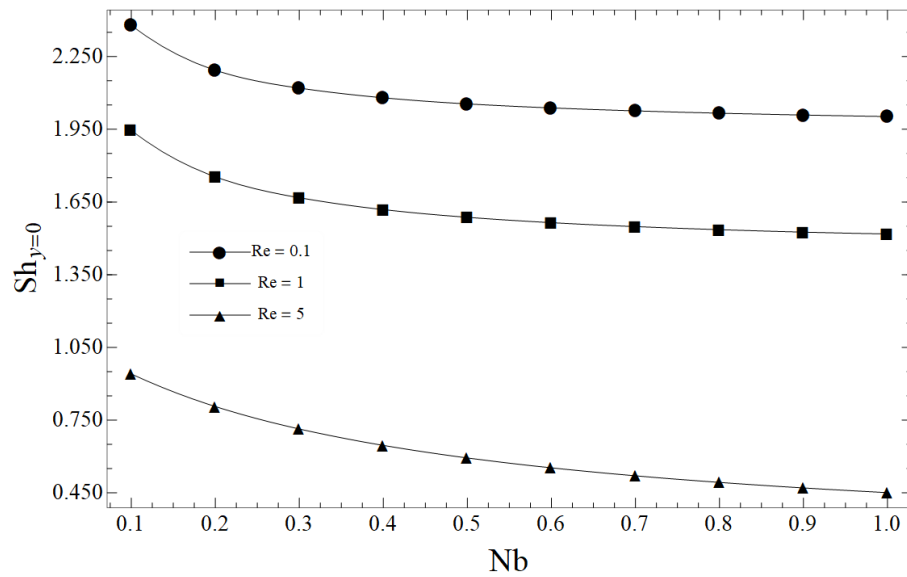


Figura 4.44: Número de Sherwood en la placa inferior $Sh_{y=0}$ en función de Nb para distintos valores de Re .

4.7.2. Placa superior

La Figura 4.45 presenta el número de Sherwood en la placa superior, $Sh_{y=1}$, como función de Nt para distintos valores de Nb . En todos los casos, $Sh_{y=1}$ toma valores negativos, lo cual es consistente con la dirección del flujo másico neto asociada al gradiente de concentración en la placa superior, según la convención de signos adoptada en el modelo. Se observa que, al

incrementar Nt , $Sh_{y=1}$ aumenta (se vuelve menos negativo), lo que indica que la termoforesis modifica el gradiente de concentración en la pared superior reduciendo la magnitud del flujo másico adimensional. Además, para un Nt fijo, el valor de $Sh_{y=1}$ disminuye (se vuelve más negativo) conforme Nb aumenta, lo cual sugiere que una difusión browniana más intensa intensifica el transporte másico en dicha pared al reforzar el gradiente efectivo de concentración en la frontera.

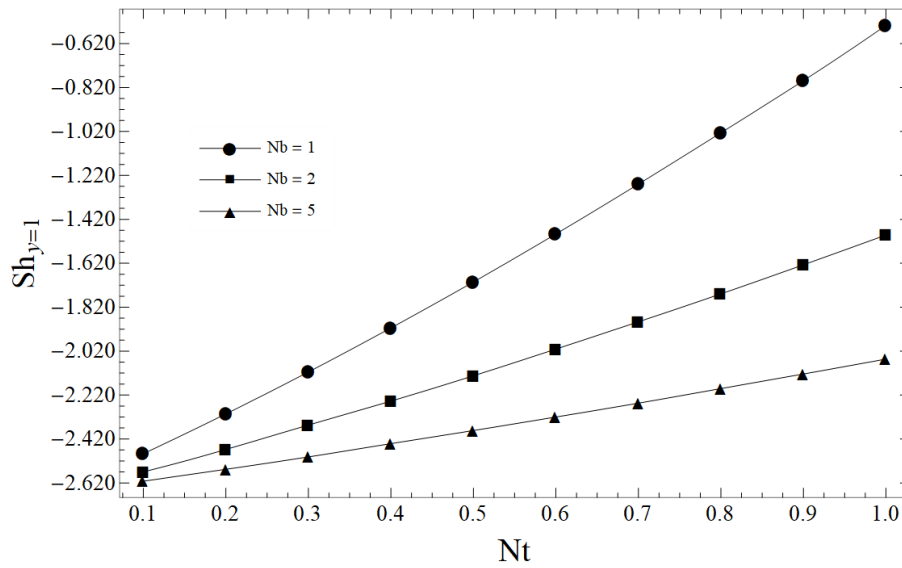


Figura 4.45: Número de Sherwood en la placa superior $Sh_{y=1}$ en función de Nt para distintos valores de Nb .

La Figura 4.46 presenta el número de Sherwood en la placa superior $Sh_{y=1}$ en función de Nb para distintos valores de Le . En todos los casos $Sh_{y=1}$ toma valores negativos, lo que es consistente con la convención de signo adoptada para el flujo másico en la pared superior. Se aprecia que $Sh_{y=1}$ se vuelve menos negativo al aumentar Nb , indicando una disminución en la magnitud del gradiente de concentración. Por otro lado, al aumentar Le la magnitud $|Sh_{y=1}|$ se incrementa, lo cual sugiere que el parámetro Le refuerza el gradiente efectivo de concentración en la vecindad de la placa superior.

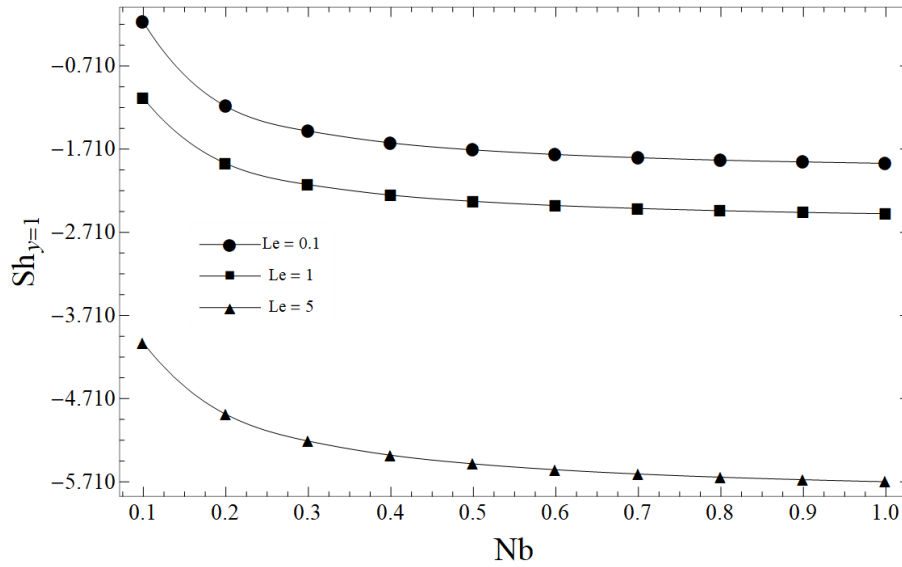


Figura 4.46: Número de Sherwood en la placa superior $Sh_{y=1}$ en función de Nb para distintos valores de Le .

Finalmente, la Figura 4.47 muestra $Sh_{y=1}$ en función de Nb para distintos valores de Re . Se observa que, al aumentar Nb , $Sh_{y=1}$ se hace menos negativo (disminuye $|Sh_{y=1}|$), mientras que al incrementar Re la magnitud $|Sh_{y=1}|$ aumenta de forma notable. Este resultado indica que la intensidad del flujo (medida por Re) tiene un impacto fuerte sobre el gradiente de concentración en la pared superior, y que dicho efecto se modula por la difusión browniana.

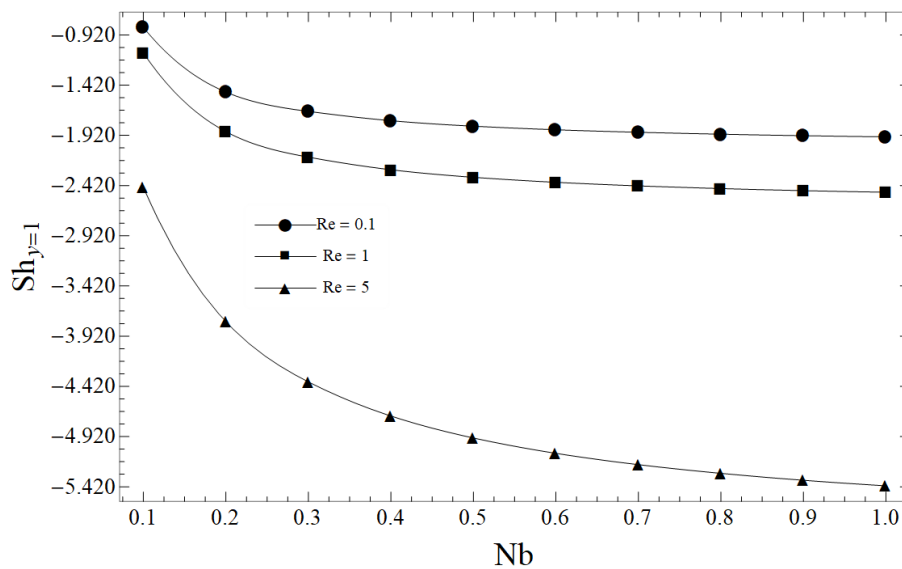


Figura 4.47: Número de Sherwood en la placa superior $Sh_{y=1}$ en función de Nb para distintos valores de Re .

4.8. Conclusión

En este capítulo se presentó el análisis numérico del flujo MHD de un nanofluido híbrido en un canal inclinado con medio poroso en régimen Darcy–Forchheimer, incorporando deslizamiento, radiación térmica no lineal, disipación viscosa y óhmica, así como transferencia de masa por difusión browniana y termoforesis. A partir de la solución adimensional se evaluó la sensibilidad de los campos $u(y)$, $\theta(y)$ y $\phi(y)$, así como de los indicadores integrales $\langle S \rangle$, C_f , Nu y Sh (definidos en el Capítulo 3).

En términos generales, Da y Γ incrementan la velocidad, mientras que Ha la reduce por efecto de Lorentz; Ec afecta principalmente las irreversibilidades (vía disipación) más que la hidrodinámica. En la respuesta térmica, la radiación (Rd , Nr) domina la producción entrópica y la transferencia de calor, mientras que Pr redistribuye el intercambio térmico entre placas. En transferencia de masa, Nb , Le y Re modifican de forma significativa los gradientes de concentración y el número de Sherwood, con efectos directos sobre las irreversibilidades difusivas.

- **Efecto de Da (con $\Gamma = 0.5$).** Al incrementar Da de 0.1 a 10, el máximo de velocidad aumenta $\approx 8.55\%$ (en $y \approx 0.5$). A $\Gamma = 0.5$, $\langle S \rangle$ cambia sólo $\approx 0.052\%$, mientras que C_f aumenta $\approx 8.41\%$ en la placa inferior y $\approx 8.47\%$ en la superior (en valor absoluto).
- **Efecto de Ha (con $\Gamma = 0.5$).** Al incrementar Ha de 0.1 a 5, el máximo de velocidad disminuye $\approx 17.20\%$ (en $y \approx 0.5$). A $\Gamma = 0.5$, $\langle S \rangle$ se reduce sólo $\approx 0.143\%$, mientras que C_f disminuye $\approx 16.93\%$ en la placa inferior y $\approx 17.09\%$ en la superior (en valor absoluto).
- **Efecto de Ec (con $\Gamma = 0.5$).** El número de Eckert apenas modifica la hidrodinámica: $u_{\text{máx}}$ cambia $\approx 0.035\%$ al pasar de $Ec = 0.1$ a $Ec = 10$. En contraste, a $\Gamma = 0.5$ $\langle S \rangle$ aumenta de 0.345575 a 0.386977 ($\approx 12.01\%$), mientras que C_f varía menos del 1%.
- **Efecto de Nr (a $Rd = 0.5$).** Para $Rd \in [0, 1]$, $\langle S \rangle$ crece hasta $\approx 90.22\%$ (para $Nr = 2$). A $Rd = 0.5$, incrementar Nr de 0.1 a 2 eleva $\langle S \rangle \approx 83.75\%$. En el campo térmico, $\theta(0)$ aumenta $\approx 24.51\%$, mientras que $\theta(1)$ disminuye $\approx 25.26\%$, indicando redistribución térmica por radiación superficial. A $Rd = 0.5$, los Nusselt se modifican moderadamente con Nr : $Nu_{y=0}$ aumenta $\approx 8.27\%$ y $|Nu_{y=1}| \approx 2.11\%$ al pasar de $Nr = 0.1$ a $Nr = 2$.
- **Efecto de Pr (a $Rd = 0.5$).** Al aumentar Pr de 0.1 a 3, el campo térmico se eleva: $\theta(0.5)$ aumenta $\approx 21.00\%$ y $\theta(1) \approx 42.02\%$, mientras que $\langle S \rangle$ sólo aumenta $\approx 2.35\%$. La transferencia de calor se redistribuye entre placas: $Nu_{y=0}$ disminuye $\approx 25.49\%$ y $|Nu_{y=1}|$ aumenta $\approx 48.73\%$.
- **Efecto de Ec (a $Rd = 0.5$).** Al pasar de $Ec = 0.5$ a $Ec = 5$, $\langle S \rangle$ aumenta $\approx 12.68\%$,

mientras que $\theta(0.5)$ sólo aumenta $\approx 1.14\%$. En transferencia de calor, $Nu_{y=0}$ cambia $\approx -1.52\%$ y $|Nu_{y=1}| \approx +1.27\%$.

- **Efecto de Nb a $Nt = 0.6$.** Al aumentar Nb de 1 a 5, la concentración se incrementa: $\phi(0.5) \approx 36.63\%$ y $\phi(1) \approx 57.83\%$. En el mismo intervalo, $\langle S \rangle$ disminuye $\approx 4.30\%$, $Sh_{y=0}$ disminuye $\approx 15.00\%$ y $|Sh_{y=1}|$ aumenta $\approx 56.04\%$.
- **Efecto de Le a $Nb = 0.6$.** Al incrementar Le de 0.1 a 5, la concentración aumenta fuertemente: $\phi(0.5) \approx 110.78\%$ y $\phi(1) \approx 174.48\%$. En el mismo intervalo, $\langle S \rangle$ disminuye $\approx 7.21\%$; $Sh_{y=0}$ cae $\approx 74.75\%$ y $|Sh_{y=1}|$ aumenta $\approx 213.74\%$.
- **Efecto de Re a $Nb = 0.6$.** Al incrementar Re de 0.1 a 5, $\phi(0.5)$ aumenta $\approx 100.91\%$ y $\phi(1) \approx 153.24\%$. La entropía global disminuye $\approx 7.52\%$; $Sh_{y=0}$ cae $\approx 72.88\%$ y $|Sh_{y=1}|$ aumenta $\approx 172.93\%$.

En conjunto, las mayores sensibilidades cuantitativas se presentan en $\langle S \rangle$ bajo variaciones radiativas (Rd , Nr) y disipativas (Ec), y en el transporte másico (Sherwood) bajo variaciones de Le y Re . Estos resultados sirven como base para sintetizar conclusiones globales e implicaciones de diseño en el Capítulo 5.

Conclusiones Finales

En esta tesis se desarrolló un modelo matemático para describir el comportamiento termo-hidrodinámico de un flujo MHD de nanofluido híbrido en un canal inclinado y poroso, considerando deslizamiento hidrodinámico, esfuerzo acoplado, radiación térmica no lineal, movimiento browniano, termoforesis y medio poroso con succión/inyección en las paredes. A partir de los resultados obtenidos, puede afirmarse que el objetivo general de la investigación fue alcanzado, ya que el modelo formulado permitió analizar de manera consistente la respuesta dinámica, térmica y difusiva del sistema, así como establecer criterios de operación vinculados con la minimización de la producción de entropía.

La metodología seguida permitió deducir las ecuaciones adimensionales de momento, energía y concentración con sus respectivas condiciones de frontera, resolver el sistema acoplado mediante Runge–Kutta con técnica de disparo y, finalmente, evaluar no sólo los perfiles de velocidad, temperatura y concentración, sino también magnitudes integrales de interés ingenieril como la entropía global, el coeficiente de fricción y los números de Nusselt y Sherwood.

Conclusiones principales

- a) En el comportamiento dinámico se comprobó que el flujo es especialmente sensible a Γ , Da y Ha . El incremento de Da favoreció la aceleración del fluido, mientras que el aumento de Ha produjo el efecto opuesto debido al frenado electromagnético asociado a la fuerza de Lorentz. Por ejemplo, a $\Gamma = 0.5$, el incremento de Da de 0.1 a 10 aumentó $u_{\text{máx}}$ en aproximadamente 8.55 %, mientras que el incremento de Ha de 0.1 a 5 lo redujo en aproximadamente 17.20 %. En contraste, Ec tuvo una influencia prácticamente despreciable sobre la velocidad, lo que confirma que su efecto principal se manifiesta en el balance energético y no en la ecuación de momento.
- b) En el comportamiento térmico se observó que la radiación y la disipación interna controlan la distribución de temperatura. A $Rd = 0.5$, al incrementar Nr de 0.1 a 2, la temperatu-

ra en la pared caliente aumentó aproximadamente 24.51 %, mientras que en la pared fría disminuyó aproximadamente 25.26 %, mostrando una redistribución térmica clara debida al intercambio radiativo en frontera. Asimismo, al aumentar Pr de 0.1 a 3, la temperatura adimensional se elevó en el interior del canal, con incrementos de aproximadamente 21.00 % en $\theta(0.5)$ y 42.02 % en $\theta(1)$, mientras que el efecto de Ec sobre $\theta(y)$ fue más moderado.

- c) El transporte de masa estuvo gobernado por la interacción entre difusión browniana, termoforesis y efectos convectivo–difusivos. Para $Nt = 0.6$, el incremento de Nb de 1 a 5 elevó la concentración en todo el canal, alcanzando un aumento aproximado de 57.83 % en $\phi(1)$. Más aún, con $Nb = 0.6$, el incremento de Le de 0.1 a 5 elevó $\phi(1)$ aproximadamente 174.48 %, mientras que el incremento de Re de 0.1 a 5 produjo un aumento aproximado de 153.24 %. Estos resultados muestran que la difusión de masa es altamente sensible tanto a la relación de difusividades como a la intensidad convectiva del flujo.
- d) La producción de entropía resultó ser uno de los indicadores más sensibles del sistema. Se confirmó que la radiación térmica y la disipación interna son los mecanismos que más intensifican las irreversibilidades. En el bloque radiativo, para $Rd \in [0, 1]$ y $Nr = 2$, la entropía global presentó incrementos de hasta aproximadamente 90 %, mientras que a $Rd = 0.5$ el incremento de Nr de 0.1 a 2 elevó $\langle S \rangle$ en aproximadamente 83.75 %. De forma complementaria, Ec mostró un efecto importante sobre la irreversibilidad: a $Rd = 0.5$, $\langle S \rangle$ aumentó aproximadamente 12.68 % al pasar de $Ec = 0.5$ a $Ec = 5$. Por el contrario, en la parte difusiva, el incremento de Nb tendió a reducir la entropía global, lo que indica que el suavizamiento de gradientes de concentración disminuye las pérdidas de energía útil.
- e) La evaluación de la transferencia de calor mostró que la radiación volumétrica dominó el comportamiento del número de Nusselt. En la placa inferior, $Nu_{y=0}$ aumentó fuertemente con Rd , alcanzando variaciones del orden de 10^2 %; por ejemplo, en casos representativos se obtuvieron incrementos de hasta aproximadamente 277 % al pasar de $Rd = 0$ a $Rd = 1$. En cambio, a $Rd = 0.5$, el efecto de Nr fue más moderado. También se observó que Pr redistribuye la transferencia de calor entre ambas paredes, ya que al pasar de $Pr = 0.1$ a $Pr = 3$, $Nu_{y=0}$ disminuyó aproximadamente 25.49 %, mientras que la magnitud $|Nu_{y=1}|$ aumentó aproximadamente 48.73 %.
- f) En el comportamiento hidráulico, el coeficiente de fricción mostró gran sensibilidad a Γ y una dependencia moderada de Da y Ha . A $\Gamma = 0.5$, incrementar Da de 0.1 a 10 aumentó C_f aproximadamente 8.4 %, mientras que incrementar Ha de 0.1 a 5 lo redujo alrededor de 17 % en valor absoluto. De nuevo, Ec tuvo un efecto prácticamente nulo sobre esta magnitud, en concordancia con su escasa influencia sobre la hidrodinámica del sistema.

- g) La transferencia de masa global, medida a través del número de Sherwood, también permitió identificar tendencias claras. En la placa inferior, $Sh_{y=0}$ disminuyó de forma importante al incrementar Le y Re : para $Nb = 0.6$, se redujo aproximadamente 74.75 % al pasar de $Le = 0.1$ a $Le = 5$, y aproximadamente 72.88 % al pasar de $Re = 0.1$ a $Re = 5$. En la placa superior ocurrió el comportamiento opuesto en términos de magnitud, ya que $|Sh_{y=1}|$ aumentó aproximadamente 213.74 % con Le y 172.93 % con Re . Esto pone de manifiesto que ambos parámetros son determinantes en la redistribución del transporte másico entre las paredes del canal.

Síntesis final

En conjunto, los resultados obtenidos mostraron que el modelo desarrollado fue capaz de reproducir y explicar el papel que desempeñan los principales parámetros físicos del problema sobre la dinámica del flujo, la distribución térmica, la difusión de masa, la generación de entropía, la transferencia de calor, la transferencia de masa global y el comportamiento hidráulico. Además, dentro de los rangos analizados, fue posible identificar condiciones de operación particularmente favorables asociadas con mínimos de entropía y con máximos o mínimos de los indicadores globales del sistema.

En términos de irreversibilidades, el valor mínimo de entropía global fue $\langle S \rangle = 0.141945$, obtenido para $Rd = 0$ y $Nr = 0.1$. Asimismo, se identificó $\langle S \rangle = 0.345249$ para $\Gamma = 0.1$ y $Ec = 0.1$, y $\langle S \rangle = 0.328908$ para $Nb = 0.6$ y $Le = 5$. Estos resultados muestran que la disminución de la radiación, de la disipación interna y de ciertos acoplamientos difusivos favorece condiciones con menores pérdidas de energía útil.

En transferencia de calor, el valor máximo en la placa inferior fue $Nu_{y=0} = 3.79916$, obtenido para $Rd = 1$ y $Pr = 0.1$, mientras que en la placa superior la mayor magnitud fue $|Nu_{y=1}| = 4.62072$, correspondiente a $Rd = 1$ y $Pr = 3$. En comportamiento hidráulico, el máximo coeficiente de fricción en la placa inferior fue $C_{f,y=0} = 0.0586254$, para $\Gamma = 1$ y $Da = 10$, mientras que el mínimo fue $C_{f,y=0} = 0.00622715$, para $\Gamma = 0.1$ y $Ha = 5$. Finalmente, en transferencia de masa global, el valor máximo en la placa inferior fue $Sh_{y=0} = 2.42598$, para $Le = 0.1$ y $Nb = 0.1$, y en la placa superior la mayor magnitud fue $|Sh_{y=1}| = 5.70973$, para $Le = 5$ y $Nb = 1.0$.

Por tanto, puede concluirse que la tesis no sólo permitió caracterizar el sistema desde el punto de vista dinámico, térmico y difusivo, sino también ubicar, dentro de los intervalos de estudio, condiciones de operación asociadas con mínima entropía y con máximos o mínimos de Nu , C_f y Sh . Esto constituye una aportación útil para el análisis y diseño de sistemas de transferencia

de calor y masa con nanofluidos híbridos bajo condiciones magnetohidrodinámicas.

Sugerencias para trabajo futuro

- a) Ampliar el espacio paramétrico de fracción volumétrica total y proporciones de mezcla del nanofluido híbrido (y/o evaluar nanofluidos ternarios), analizando su impacto en Nu , C_f , Sh y $\langle S \rangle$.
- b) Incorporar explícitamente distintas morfologías de nanopartículas (esférica, cilíndrica, placa, etc.) y comparar modelos alternativos de propiedades termofísicas, evaluando la sensibilidad de resultados ante correlaciones rivales.
- c) Considerar extensiones físicas del modelo: no estacionariedad (transiente), condiciones térmicas variables, y/o comportamiento no newtoniano; así como reacciones químicas/energía de activación si el sistema a microescala lo justifica.
- d) Formular una optimización multiobjetivo con objetivos simultáneos (minimizar $\langle S \rangle$ y maximizar Nu y/o Sh bajo restricciones hidráulicas), para identificar frentes de Pareto y regiones óptimas de operación.
- e) Implementar modelos sustitutos basados en aprendizaje automático para aproximar rápidamente $\langle S \rangle$, C_f , Nu y Sh en el espacio paramétrico, acelerando búsquedas de óptimos y análisis de sensibilidad global (por ejemplo, redes neuronales o Gaussian Processes entrenados con una malla de soluciones RK–shooting).

Bibliografía

- [1] Sadi Carnot. Reflections on the motive power of fire, and on machines fitted to develop that power. *Paris: Bachelier*, 108(1824):1824, 1824.
- [2] Milton Kerker. Sadi carnot. *The Scientific Monthly*, 85(3):143–149, 1957.
- [3] Rudolf Clausius. Xi. on the nature of the motion which we call heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 14(91):108–127, 1857.
- [4] William Thomson. Philosophical magazine, october 1848: from sir william thomson, mathematical and physical papers, vol. 1, 1882.
- [5] Cristina Furió-Gómez, Jordi Solbes, Carles Furió Más, et al. La historia del primer principio de la termodinámica y sus implicaciones didácticas. *Universidad de Cádiz*, 2007.
- [6] George Tsatsaronis. Thermoeconomic analysis and optimization of energy systems. *Progress in energy and combustion science*, 19(3):227–257, 1993.
- [7] Christos A Frangopoulos. Recent developments and trends in optimization of energy systems. *Energy*, 164:1011–1020, 2018.
- [8] Lars Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. i & ii. *Physical review*, 37,38(4,12):405,2265, 1931.
- [9] Carl Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. i, ii & iii. *Physical Review*, 58(3,3,10):267,269,919, 1940.
- [10] Georg Klein and Ilya Prigogine. Sur la mecanique statistique des phenomenes irreversibles iii. *Physica*, 19(1-12):1053–1071, 1953.
- [11] Ilya Prigogine and Radu Balescu. Irreversible processes in gases i, ii & iii. *Physica*, 25,25,26(1-6,1-6,3):281–301,302–323,145–159, 1959,1959,1960.

- [12] Leon Van Hove. The approach to equilibrium in quantum statistics: A perturbation treatment to general order. *Physica*, 23(1-5):441–480, 1957.
- [13] Aloysio Janner, L Van Hove, and E Verboven. The evolution to quantum statistical equilibrium for a simple model: The strong coupling limit. *Physica*, 28(12):1341–1360, 1962.
- [14] GV Chester. The theory of irreversible processes. *Reports on Progress in Physics*, 26(1):411, 1963.
- [15] James Wei. Irreversible thermodynamics in engineering. *Industrial & Engineering Chemistry*, 58(10):55–60, 1966.
- [16] Ingo Müller and Wolf Weiss. Thermodynamics of irreversible processes—past and present. *The European Physical Journal H*, 37(2):139–236, 2012.
- [17] Adrian Bejan. Fundamentals of exergy analysis, entropy generation minimization, and the generation of flow architecture. *International journal of energy research*, 26(7), 2002.
- [18] Adrian Bejan. *Advanced engineering thermodynamics*. John Wiley & Sons, 2016.
- [19] Norio Sato. *Chemical energy and exergy: an introduction to chemical thermodynamics for engineers*. Elsevier, 2004.
- [20] Signe Kjelstrup Ratkje and Jakob De Swaan Arons. Denbigh revisited: Reducing lost work in chemical processes. *Chemical engineering science*, 50(10):1551–1560, 1995.
- [21] Guillermo Ibáñez, Sergio Cuevas, and Mariano López de Haro. Optimization analysis of an alternate magnetohydrodynamic generator. *Energy Conversion and Management*, 43(14):1757–1771, 2002.
- [22] Guillermo Ibáñez Duharte, Mariano López de Haro, and Sergio Cuevas García. Thermodynamic optimization of radial mhd flow between parallel circular disks. 2004.
- [23] MH Saidi and A Montazeri. Second law analysis of a magnetohydrodynamic plasma generator. *Energy*, 32(9):1603–1616, 2007.
- [24] Aytac Arikoglu, Ibrahim Ozkol, and Guven Komurgoz. Effect of slip on entropy generation in a single rotating disk in mhd flow. *Applied Energy*, 85(12):1225–1236, 2008.
- [25] Guillermo Ibáñez and Sergio Cuevas. Entropy generation minimization of a mhd (magnetohydrodynamic) flow in a microchannel. *Energy*, 35(10):4149–4155, 2010.
- [26] Paresh Vyas and Nupur Srivastava. Entropy analysis of generalized mhd couette flow inside a composite duct with asymmetric convective cooling. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 40:603–614, 2015.

- [27] MM Rashidi, N Kavyani, and S Abelman. Investigation of entropy generation in mhd and slip flow over a rotating porous disk with variable properties. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 70:892–917, 2014.
- [28] Guillermo Ibáñez. Entropy generation in mhd porous channel with hydrodynamic slip and convective boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 80:274–280, 2015.
- [29] Palash Mondal, Dilip K Maiti, GC Shit, and Guillermo Ibáñez. Heat transfer and entropy generation in a mhd couette–poiseuille flow through a microchannel with slip, suction–injection and radiation. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 147(6):4253–4273, 2022.
- [30] S US Choi and Jeffrey A Eastman. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. Technical report, Argonne National Lab.(ANL), Argonne, IL (United States), 1995.
- [31] Guillermo Ibáñez, Aracely López, Joel Pantoja, and Joel Moreira. Entropy generation analysis of a nanofluid flow in mhd porous microchannel with hydrodynamic slip and thermal radiation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 100:89–97, 2016.
- [32] Aliakbar Izadi, Majid Siavashi, Hamed Rasam, and Qingang Xiong. Mhd enhanced nanofluid mediated heat transfer in porous metal for cpu cooling. *Applied Thermal Engineering*, 168:114843, 2020.
- [33] SS Ghadikolaei, M Yassari, H Sadeghi, Kh Hosseinzadeh, and DD Ganji. Investigation on thermophysical properties of tio₂–cu/h₂o hybrid nanofluid transport dependent on shape factor in mhd stagnation point flow. *Powder technology*, 322:428–438, 2017.
- [34] M Sheikholeslami, H Sajjadi, A Amiri Delouei, M Atashafrooz, and Zhixiong Li. Magnetic force and radiation influences on nanofluid transportation through a permeable media considering al₂o₃ nanoparticles. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 136:2477–2485, 2019.
- [35] Mohammed Benkhedda, Toufik Boufendi, Tahar Tayebi, and Ali J Chamkha. Convective heat transfer performance of hybrid nanofluid in a horizontal pipe considering nanoparticles shapes effect. *Journal of Thermal analysis and Calorimetry*, 140(1):411–425, 2020.
- [36] Seyyed Masoud Seyyedi, AS Dogonchi, DD Ganji, and M Hashemi-Tilehnoee. Entropy generation in a nanofluid-filled semi-annulus cavity by considering the shape of nanoparticles. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 138(2):1607–1621, 2019.

- [37] Rodolfo Estrada, Guillermo Ibáñez, Aracely López, Orlando Lastres, Joel Pantoja, and Juan Reyes. Analytical analysis of impacts of nanoparticle shapes and uncertainty in thermophysical properties on optimum operating conditions of mhd nanofluid flow in a microchannel filled with porous medium. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 149(1):265–298, 2024.
- [38] Iskander Tlili, Nawaf N Hamadneh, Waqar A Khan, and Samer Atawneh. Thermodynamic analysis of mhd couette–poiseuille flow of water-based nanofluids in a rotating channel with radiation and hall effects. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 132:1899–1912, 2018.
- [39] M Habibi Matin, R Hosseini, M Simiari, and P Jahangiri. Entropy generation minimization of nanofluid flow in a mhd channel considering thermal radiation effect. *Mechanics*, 19(4):445–450, 2013.
- [40] Mohsen Torabi and Kaili Zhang. Classical entropy generation analysis in cooled homogeneous and functionally graded material slabs with variation of internal heat generation with temperature, and convective–radiative boundary conditions. *Energy*, 65:387–397, 2014.
- [41] GC Shit, R Haldar, and S Mandal. Entropy generation on mhd flow and convective heat transfer in a porous medium of exponentially stretching surface saturated by nanofluids. *Advanced Powder Technology*, 28(6):1519–1530, 2017.
- [42] Guillermo Ibáñez, Aracely López, Imer López, Joel Pantoja, Joel Moreira, and Orlando Lastres. Optimization of mhd nanofluid flow in a vertical microchannel with a porous medium, nonlinear radiation heat flux, slip flow and convective–radiative boundary conditions. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 135:3401–3420, 2019.
- [43] Rasool Alizadeh, Nader Karimi, Reza Arjmandzadeh, and Amirfarhang Mehdizadeh. Mixed convection and thermodynamic irreversibilities in mhd nanofluid stagnation-point flows over a cylinder embedded in porous media. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 135:489–506, 2019.
- [44] Chaoli Zhang, Liancun Zheng, Xinxin Zhang, and Goong Chen. Mhd flow and radiation heat transfer of nanofluids in porous media with variable surface heat flux and chemical reaction. *Applied Mathematical Modelling*, 39(1):165–181, 2015.
- [45] Ignacio Gómez Rosales, Guillermo Ibáñez Duharte, Aracely López Grijalva, Orlando Lastres Danguillecourt, and Juan Reyes-Nava. Entropy generation minimization and nonlinear heat transport in mhd flow of a couple stress nanofluid through an inclined permeable

channel with a porous medium, thermal radiation and slip. *Heat Transfer*, 49(8):4878–4906, 2020.

- [46] M Venkateswarlu, D Venkata Lakshmi, and G Darmaiah. Influence of slip condition on radiative mhd flow of a viscous fluid in a parallel porous plate channel in presence of heat absorption and chemical reaction. *Journal of the Korean Society for Industrial and Applied Mathematics*, 20(4):333–354, 2016.
- [47] T Hayat, Faisal Shah, A Alsaedi, and Zakir Hussain. Outcome of homogeneous and heterogeneous reactions in darcy-forchheimer flow with nonlinear thermal radiation and convective condition. *Results in physics*, 7:2497–2505, 2017.
- [48] T Hayat, Zakir Hussain, A Alsaedi, and M Mustafa. Nanofluid flow through a porous space with convective conditions and heterogeneous–homogeneous reactions. *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, 70:119–126, 2017.
- [49] M Ramzan, Farhan Yousaf, M Farooq, and Jae Dong Chung. Mixed convective viscoelastic nanofluid flow past a porous media with sores—dufour effects. *Communications in Theoretical Physics*, 66(1):133, 2016.
- [50] Mlamuli Dhlamini, Peri K Kameswaran, Precious Sibanda, Sandile Motsa, and Hiranmoy Mondal. Activation energy and binary chemical reaction effects in mixed convective nanofluid flow with convective boundary conditions. *Journal of Computational Design and Engineering*, 6(2):149–158, 2019.
- [51] R Kalaivanan, N Vishnu Ganesh, and Qasem M Al-Mdallal. An investigation on arrhenius activation energy of second grade nanofluid flow with active and passive control of nanomaterials. *Case Studies in Thermal Engineering*, 22:100774, 2020.
- [52] Ali Saleh Alshomrani, Malik Zaka Ullah, and Dumitru Baleanu. Importance of multiple slips on bioconvection flow of cross nanofluid past a wedge with gyrotactic motile microorganisms. *Case Studies in Thermal Engineering*, 22:100798, 2020.
- [53] GHR Kefayati and Hui Tang. Simulation of natural convection and entropy generation of mhd non-newtonian nanofluid in a cavity using buongiorno’s mathematical model. *International Journal of Hydrogen Energy*, 42(27):17284–17327, 2017.
- [54] G Kalpana, KR Madhura, and Ramesh B Kudenatti. Magnetohydrodynamic boundary layer flow of hybrid nanofluid with the thermophoresis and brownian motion in an irregular channel: a numerical approach. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 32:101075, 2022.

- [55] Habib-Olah Sayehvand and Amir Basiri Parsa. A new numerical method for investigation of thermophoresis and brownian motion effects on mhd nanofluid flow and heat transfer between parallel plates partially filled with a porous medium. *Results in physics*, 7:1595–1607, 2017.
- [56] G Kalpana, KR Madhura, and SS Iyengar. Numerical computation on marangoni convective flow of two-phase mhd dusty nanofluids under brownian motion and thermophoresis effects. *Heat Transfer—Asian Research*, 49(1):626–650, 2020.
- [57] Tasawar Hayat, Madiha Rashid, M Imtiaz, and A Alsaedi. Mhd effects on a thermo-solutal stratified nanofluid flow on an exponentially radiating stretching sheet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 58:214–223, 2017.
- [58] AS Dogonchi and DD Ganji. Analytical solution and heat transfer of two-phase nanofluid flow between non-parallel walls considering joule heating effect. *Powder Technology*, 318:390–400, 2017.
- [59] Yahaya Shagaiya Daniel, Zainal Abdul Aziz, Zuhaila Ismail, and Faisal Salah. Entropy analysis in electrical magnetohydrodynamic (mhd) flow of nanofluid with effects of thermal radiation, viscous dissipation, and chemical reaction. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 7(4):235–242, 2017.
- [60] M Irfan, WA Khan, M Khan, and M Mudassar Gulzar. Influence of arrhenius activation energy in chemically reactive radiative flow of 3d carreau nanofluid with nonlinear mixed convection. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 125:141–152, 2019.
- [61] SM Arifuzzaman, Md Shakhaoath Khan, Khan Enaet Hossain, Md Sirajul Islam, Sonia Akter, and Raju Roy. Chemically reactive viscoelastic fluid flow in presence of nano particle through porous stretching sheet. *Frontiers in Heat and Mass Transfer*, 9:5, 2017.
- [62] SRR Reddy, P Bala Anki Reddy, and Krishnendu Bhattacharyya. Effect of nonlinear thermal radiation on 3d magneto slip flow of eyring-powell nanofluid flow over a slendering sheet with binary chemical reaction and arrhenius activation energy. *Advanced Powder Technology*, 30(12):3203–3213, 2019.
- [63] BC Prasannakumara, BJ Gireesha, MR Krishnamurthy, and K Ganesh Kumar. Mhd flow and nonlinear radiative heat transfer of sisko nanofluid over a nonlinear stretching sheet. *Informatics in Medicine Unlocked*, 9:123–132, 2017.
- [64] Muhammad Ramzan, Jae Dong Chung, and Naeem Ullah. Radiative magnetohydrodynamic nanofluid flow due to gyrotactic microorganisms with chemical reaction and nonlinear thermal radiation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 130:31–40, 2017.

- [65] Mehran Kardar. *Statistical physics of particles*. Cambridge University Press, 2007.
- [66] Leopoldo García-Colín Scherer. *Introducción a la termodinámica clásica*. Trillas, 1980.
- [67] Eric D Schneider and James J Kay. Life as a manifestation of the second law of thermodynamics. *Mathematical and computer modelling*, 19(6-8):25–48, 1994.
- [68] MW Zemansky and RH Dittman Calor. *Termodinámica* (6ª edición), 1984.
- [69] S.R. de Groot and P. Mazur. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. Dover, 1962.
- [70] Tasos Papanastasiou, Georgios Georgiou, and Andreas N Alexandrou. *Viscous fluid flow*. CRC press, 2021.
- [71] Byung Chan Eu and Byung Chan Eu. Thermodynamics of irreversible processes. *Nonequilibrium Statistical Mechanics: Ensemble Method*, pages 12–54, 1998.
- [72] Diego Alfonso Sámano Tirado, Mihir Sen, and EE Indiana. *Mecánica de fluidos*, 2009.
- [73] Tuncer Cebeci, Peter Bradshaw, Tuncer Cebeci, and Peter Bradshaw. Conservation equations for mass, momentum, and energy. *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, pages 19–40, 1984.
- [74] Etienne Guyon, Jean Pierre Hulin, Luc Petit, and Catalin D Mitescu. *Physical hydrodynamics*. Oxford university press, 2015.
- [75] Muhammad Saqib, Saqib Hussain, Muhammad Umer Farooq, et al. Numerical investigation of entropy generation in a magnetohydrodynamic flow of hybrid nanofluid with viscous dissipation and joule heating. *Journal of Molecular Liquids*, 301:112–474, 2020.
- [76] M. Farooq, S. Hussain, M. Saqib, et al. Heat transfer and entropy generation in mhd hybrid nanofluid flow in a channel with convective boundary condition. *Heat Transfer*, 48(7):3341–3363, 2019.
- [77] B.C. Pak and Y.I. Cho. Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles. *Experimental Heat Transfer*, 11(2):151–170, 1998.
- [78] HC Brinkman. The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *The Journal of Chemical Physics*, 20(4):571–581, 1952.
- [79] AA Minea. A review on the thermophysical properties of water-based nanofluids and their hybrids. *The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati. Fascicle IX, Metallurgy and Materials Science*, 39:35–47, 2016.

- [80] M. Saqib, I. Khan, S. Shafie, and A. Qushairi. Recent advancement in thermophysical properties of nanofluids and hybrid nanofluids: an overview. *City Univ. Int. J. Comput. Anal.*, 3(2):16–25, 2019.
- [81] X. Wang and A. S. Mujumdar. Empirical correlations for viscosity of nanofluids based on experimental data. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(7-8):2102–2109, 2009.
- [82] James Clerk Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume 1. Clarendon Press, 1873.
- [83] R. Ganguly, S. Sen, and I. K. Puri. Modeling the electrical conductivity of nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 56:454–462, 2013.
- [84] P.A. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [85] A. et al. López. Heat transfer in nanofluids with nonlinear radiation. *Journal of Thermal Science*, 2014.
- [86] Frank P Incropera, David P DeWitt, Theodore L Bergman, and Adrienne S Lavine. *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2007.
- [87] Adrian Bejan. *Convection heat transfer*. John Wiley & Sons, 2013.