

# Análisis de la transferencia de calor conjugada en un flujo entre dos planos paralelos considerando efectos convectivos

Guillermo Ibáñez\*, Aracely López\*, Ignacio de Jesús Gómez\*

Universidad de Ciencias y Artes de Chiapas, Facultad de Ingeniería, Libramiento Norte Poniente # 1150, Col. Lajas Maciel, C.P. 29039, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, Tel.: (961) 6170440, E-mail: guibdu@gmail.com, alpezib@hotmail.com.

## RESUMEN

Se realiza el análisis de la transferencia de calor conjugada para un sistema en el cual existe el movimiento de un fluido viscoso entre dos planos paralelos de espesor finito. Primeramente se obtienen los comportamientos dinámico y térmico del sistema que se analiza, para ello se resuelven las ecuaciones de balance de momento y energía para el fluido y de balance de energía para las paredes. Esto permite obtener los campos de velocidad y temperatura del fluido y los campos de temperatura para las paredes, respectivamente.

La ecuación de balance de momento se resuelve utilizando condiciones de frontera de no deslizamiento en las paredes y para el análisis de la transferencia de calor conjugada se utilizan condiciones de frontera de continuidad de temperatura y flujo de calor en las interfases pared-fluido y condiciones de frontera de tercer tipo en la superficie exterior de las paredes que están en contacto con el medio.

Finalmente, se estudia el efecto que sobre la temperatura y la transferencia de calor interna del sistema tienen tanto parámetros geométricos como físicos del sistema. Concretamente se estudiará el efecto que tienen parámetros tales como espesor de las paredes, conductividades térmicas de las paredes, viscosidad del fluido y distancia de separación entre paredes. En tal sentido se podrán obtener los diferentes perfiles de temperatura y valores del coeficiente adimensional de transferencia de calor interna o Número de Nusselt para variaciones de estas magnitudes.

**Palabras claves:** Transferencia de calor conjugada, Número de Nusselt, Flujo de Poiseuille

## ABSTRACT

The influence of the geometric parameters, material properties and flow conditions on heat transfer for a viscous flow between infinite parallel walls of finite thickness is studied by solving the momentum and energy conservation equations. The conjugate heat transfer problem in the fluid and solid walls is solved analytically using thermal boundary conditions of the third kind at the outer surfaces of the walls and continuity of temperature and heat flux across the fluid-wall interfaces, while the momentum equation is solved using non-slip boundary conditions.

The temperature of the system and the internal heat transfer coefficient, namely the local Nusselt number, are explored for certain suitable combination of geometric parameters, material properties and flow conditions of the system. It was found that the temperature of the system decreases with both the thermal conductivity of the walls and the Biot numbers since the heat transfer to the surroundings is higher; however, when the thickness of the walls is high the temperature of the system increases since the thermal resistance of the walls is higher. Consequently, the heat transfer to the ambient is lower.

**Key words:** Conjugate heat transfer, Nusselt number, Poiseuille flow

## INTRODUCCIÓN

En la contribución que presentamos se parte de la solución adimensional del campo de velocidad de un fluido que se mueve entre dos planos paralelos infinitos conocido como flujo de Poiseuille (Potter y Wiggert, 2007) para resolver analíticamente el problema de transferencia de calor conjugada en el fluido y en las paredes de espesor finito del canal por el que se desplaza. Este

tipo de geometría que se analiza está presente en muchos procesos de ingeniería, y por tanto, la podemos encontrar en muchas aplicaciones como intercambiadores de calor y sistemas de enfriamiento de reactores nucleares. En la solución de la ecuación de balance de energía (Manríquez, 2005; Kreith y Bohn, 2001; Çengel, 2004) tanto para el fluido como para las paredes se usan condiciones

de frontera de tercer tipo en la superficie externa de las paredes mientras que en las interfaces fluido-pared se utilizan condiciones de frontera de continuidad para la temperatura y el flujo de calor. Se obtuvo que cuando el espesor de la pared aumenta, mayor son los valores de temperatura alcanzados en el sistema. Esto se debe a que al ser mayor el espesor de la pared menor será el flujo de calor que por conducción pasa del sistema al medio que lo rodea. Además se explora el efecto que sobre la transferencia de calor interna del sistema tienen tanto parámetros geométricos como físicos del sistema para lo cual se calcula el número adimensional de Nusselt. Los resultados obtenidos constituyen un paso previo necesario para luego realizar un análisis de segunda ley y proceder a la optimización del sistema utilizando el método de minimización de la producción de entropía (Ibáñez y Cuevas, 2010; Bejan 1996).

### Comportamiento dinámico y térmico del sistema

#### *Campo de velocidad*

Se considera el flujo en estado estacionario de un fluido viscoso completamente desarrollado que se mueve entre dos planos paralelos infinitos de espesor finito. El movimiento del fluido es producido por un gradiente de presión constante en dirección longitudinal  $dp/dx$ . El plano superior está ubicado en  $y' = a$ , y el inferior en  $y' = -a$ ,  $y'$  representa la coordenada transversal. En las interfaces del fluido y las paredes es aplicada la usual condición de no deslizamiento del fluido. Bajo estas condiciones el campo de velocidad adimensional es:

$$u = \frac{3}{2}(1 - y^2) \quad (1)$$

donde la velocidad,  $u$ , ha sido normalizada con la velocidad media  $U = -(a^2/3\eta) dp/dx$  y la coordenada transversal adimensional y es normalizada con  $a$ . Aquí,  $a$  y  $\eta$  son la distancia de separación entre los planos y la viscosidad dinámica del fluido, respectivamente.

#### *Campo de temperatura*

Una vez que el campo de velocidad es conocido, se procede a resolver la ecuación de balance de energía considerando disipación viscosa y efectos convectivos (Manríquez, 2005; Kreith y Bohn, 2001; Çengel, 2004). En términos adimensionales, la ecuación de transferencia de calor se reduce a:

$$(Pe)u \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad (2)$$

donde la temperatura adimensional es dada por  $\theta = kT/(\eta U^2)$ , con  $T$  siendo la temperatura del fluido y  $k$  la conductividad térmica del fluido. Aquí,  $Pe = Ua\rho C/k$  es el número de Péclet, mientras que  $\rho$  y  $C$  son la densidad del fluido y el calor específico del fluido, respectivamente.

Como se considera el problema de transferencia de calor conjugada, la ecuación de transferencia de calor en ambas paredes del canal son también requeridas. Para las paredes inferior y superior, respectivamente, tenemos:

$$\frac{d^2 \theta_1}{dy^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \theta_2}{dy^2} = 0 \quad (4)$$

donde  $\theta_i = kT_i/\eta U^2$  es la temperatura adimensional de la pared. Los subíndices se refieren a las paredes inferior y superior, respectivamente.

Las condiciones de frontera usadas para resolver las ecuaciones (2)-(4) son las siguientes:

$$\theta = \theta_1 \text{ en } y = -1 \quad (5)$$

$$\theta = \theta_2 \text{ en } y = 1 \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \gamma_1 \frac{d\theta_1}{dy} \text{ en } y = -1 \quad (7)$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \gamma_2 \frac{d\theta_2}{dy} \text{ en } y = 1 \quad (8)$$

$$\frac{d\theta_1}{dy} - Bi_1(\theta_1 - \theta_a) = 0 \text{ en } y = -(1 + \delta_1) \quad (9)$$

$$\frac{d\theta_2}{dy} - Bi_2(\theta_2 - \theta_a) = 0 \text{ en } y = -(1 + \delta_2) \quad (10)$$

donde  $\theta_a = kT_a/\eta U^2$  es la temperatura ambiente adimensional.

Las ecuaciones (5)-(8) expresan condiciones de continuidad para la temperatura y el flujo de calor a través de las interfaces del fluido con las paredes, donde  $\gamma_i = k_i/k$  es la razón de conductividades térmicas de las paredes

respecto a la del fluido, siendo  $k_i$  las conductividades térmicas de las paredes. Las ecuaciones (9) y (10) evaluadas en la superficie exterior de las paredes establecen que el flujo de calor en cualquier punto de dicha frontera es proporcional a la diferencia que existe entre la temperatura de la superficie y la temperatura ambiente del exterior. En consecuencia la cantidad de calor que entra o sale del sistema depende de la temperatura del exterior así como de los coeficientes de transferencia de calor por convección entre las paredes y el exterior. Estos coeficientes se expresan en términos adimensionales con el número de Biot,  $Bi_i = (h_{eff})_i a/k$ , para cada pared ( $i=1,2$ ). Aquí,  $(h_{eff})_i$  es:

$$(h_{eff})_i = \frac{1}{\frac{\delta_i}{k_i} + \frac{1}{(h_e)_i}}, \quad i = 1,2 \quad (11)$$

donde  $\delta_i$  es el espesor de las paredes, mientras que  $(h_e)_i$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección externo de cada pared.

Para resolver las ecuaciones (2)-(4) bajo las condiciones de frontera (5)-(10), analizamos sólo la región de flujo térmico completamente desarrollado tal que la temperatura adimensional puede ser expresada como  $\Theta(x,y) = Ax + \theta(y)$ , donde el gradiente de temperatura en dirección axial  $A$ , se considera constante (Ibáñez y Cuevas, 2010). Los campos de temperatura para el fluido y las paredes son determinados resolviendo el problema de valores de frontera previo. Para la región del fluido, se obtiene:

$$\theta(y) = -\frac{1}{4} \left( \frac{APe}{2} + 3 \right) y^4 + \frac{3}{4} APe y^2 + C_1 y + C_2 \quad (12)$$

donde:

$$C_1 = \frac{(APe - 3)(Bi_2 \gamma_2 (Bi_1 \delta_1 + 1) - Bi_1 \gamma_1 (Bi_2 \delta_2 + 1))}{2Bi_1 Bi_2 \gamma_1 \gamma_2 + Bi_2 \gamma_2 (Bi_1 \delta_1 + 1) + Bi_1 \gamma_1 (Bi_2 \delta_2 + 1)} \quad (13)$$

$$C_2 = \frac{(3 - APe)(Bi_2 \gamma_2 (Bi_1 \delta_1 + 1) + (Bi_1 \gamma_1 + 2(Bi_1 \delta_1 + 1))(Bi_2 \delta_2 + 1))}{2Bi_1 Bi_2 \gamma_1 \gamma_2 + Bi_2 \gamma_2 (Bi_1 \delta_1 + 1) + Bi_1 \gamma_1 (Bi_2 \delta_2 + 1)} - \frac{5}{8} APe + \frac{3}{4} + \theta_a \quad (14)$$

El campo de temperatura en las paredes está dado por:

$$\theta_1 = C_3 y + C_4 \quad (15)$$

$$\theta_2 = C_5 y + C_6 \quad (16)$$

donde:

$$C_3 = \frac{C_1 + 3 - APe}{\gamma_1} \quad (17)$$

$$C_4 = C_3 \frac{Bi_1(1 + \delta_1) + 1}{Bi_1} + \theta_a \quad (18)$$

$$C_5 = \frac{C_1 - 3 + APe}{\gamma_2} \quad (19)$$

$$C_6 = -C_5 \frac{Bi_2(1 + \delta_2) + 1}{Bi_2} + \theta_a \quad (20)$$

### Transferencia de calor interna

Para evaluar la transferencia de calor interna del sistema calculamos el número local de Nusselt para la pared superior, basado en el coeficiente de transferencia de calor interno por convección,  $h_i$ , es decir, (Manriquez, 2005)

$$h_i = -\frac{k}{T_w - T_b} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=a} \quad (21)$$

donde  $T_b$  and  $T_w$  son las expresiones dimensionales de la temperatura promedio de la sección transversal de la corriente de fluido y la temperatura en la pared, respectivamente. En consecuencia, el número global de Nusselt en la pared superior está dado por

$$Nu = \frac{h_i a}{2k} = -\frac{\left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=1}}{2(\theta_{y=1} - \theta_b)} \quad (22)$$

La temperatura promedio adimensional de la sección transversal de la corriente de fluido es definida como

$$\theta_b = \frac{\int_{-1}^1 u \theta dy}{\int_{-1}^1 u dy} \quad (23)$$

### ANÁLISIS DE RESULTADOS

La figura 1 muestra el campo de temperatura para diferentes valores del número de Biot cuando este es igual en ambas paredes con  $Pe=0.1$ ,  $A=1$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=0.5$  y  $\delta_1=\delta_2=0.2$ .

Se observa que los valores mayores de temperatura corresponden al menor valor del número de Biot. Esto se debe a que al ser menor el valor de Biot menor será el flujo de calor que pasa del sistema al medio. Los perfiles en los tres casos son simétricos respecto al plano central del canal debido a que se consideran números de Biot iguales en ambas paredes del canal.

La figura 2 muestra el campo de temperatura para diferentes relaciones de conductividades térmicas pared-fluido cuando en ambas paredes tiene el mismo valor,  $Pe=0.1$ ,  $A=1$ ,  $Bi_1=2$ ,  $Bi_2=20$ ,  $\delta_1=0.2$  y  $\delta_2=0.1$ . Se observa que el perfil con menores valores de temperatura corresponde al mayor de la relación de conductividades pared-fluido ya que al ser mayor dicha relación menor es la resistencia térmica de la pared y consecuentemente mayor es el calor transferido a los alrededores desde el sistema. A diferencia de la figura 1, aquí los perfiles de temperatura en los tres casos son asimétricos debido a que se consideran números de Biot diferentes para ambas paredes del canal. Los mayores valores de temperatura se alcanzan para zonas cercanas a la pared inferior donde menor es el número de Biot.

La figura 3 muestra el efecto que sobre la temperatura del sistema tiene el espesor de la pared inferior para  $Pe=0.1$ ,  $A=1$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=1$ ,  $Bi_1=2$ ,  $Bi_2=20$  y  $\delta_2=0.1$ . Se obtiene que ha medida que el espesor aumenta mayor son los valores de temperatura alcanzados en el sistema. Esto se debe a que al ser mayor el espesor de la pared menor será el flujo de calor que por conducción pasa del sistema al medio que lo rodea. Una vez más los perfiles no son simétricos al ser el número de Biot de las pared inferior,  $Bi_1$ , diferente al de la pared superior,  $Bi_2$ .

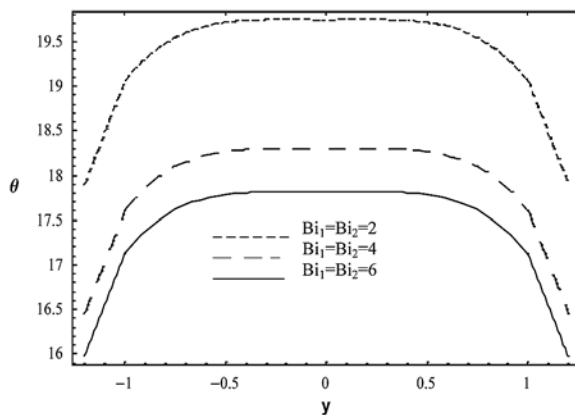


FIGURA 1

Perfil de temperatura para diferentes números de Biot cuando en ambas paredes este tiene el mismo valor,  $Pe=0.1$ ,  $A=1$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=0.5$  y  $\delta_1=\delta_2=0.2$ .

La figura 4 muestra el número de Nusselt como función de  $\delta_1$  para diferentes valores de  $\delta_2$  cuando,  $Pe=0.4$ ,  $A=4$ ,  $\gamma_1=\gamma_2=2$  y  $Bi_1=Bi_2=3$ . Una discontinuidad es observada en la curva y el número de Nusselt puede llegar a tener valores negativos. Estos valores corresponden a perfiles de temperatura con inflexiones, cuando la temperatura promedio adimensional de la sección transversal de la corriente de fluido es menor que la temperatura adimensional de la pared y en consecuencia el flujo de calor se invierte apareciendo un flujo de calor hacia el interior del fluido.

En la figura 5 el número local de Nusselt muestra un comportamiento monótono a medida que  $\gamma_1$  aumenta y alcanza un valor límite cuando  $\gamma_1$  tiende a infinito. Este valor límite puede ser determinado analíticamente y su expresión es

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \infty} Nu = \frac{35Bi_2\gamma_2(AP_e - 3)}{9(9 - 2AP_e) + C_7} \quad (24)$$

donde

$$C_7 = Bi_2[9\delta_2(9 - 2AP_e) - 2\gamma_2(17AP_e - 24)] \quad (25)$$

Se aprecia en las ecuaciones (24) y (25) que este valor límite depende de  $Pe$ ,  $A$ ,  $\gamma_2$ ,  $\delta_2$  y  $Bi_2$ . Como se puede ver de la figura 5, el aumento de  $\gamma_2$ , provoca una disminución sobre el Número local de Nusselt siendo menor el valor asintótico al cual Nusselt tiende cuando  $\gamma_1$  tiende a infinito. Físicamente esto equivale a decir que a medida que  $\gamma_2$  aumenta, la transferencia de calor por conducción predomina sobre la transferencia de calor por convección.

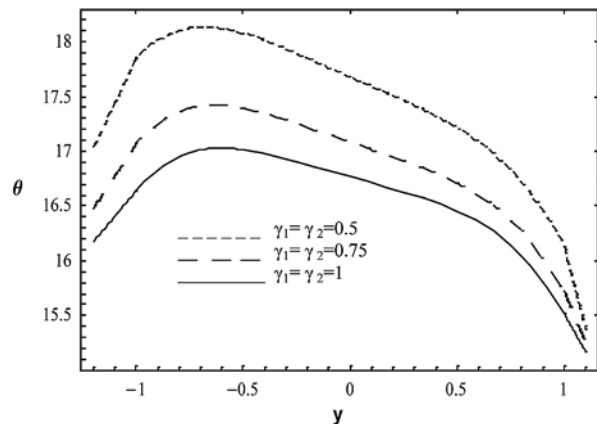


FIGURA 2

Perfil de temperatura para diferentes relaciones de conductividades térmicas pared-fluido cuando para ambas paredes tiene el mismo valor,  $Pe=0.1$ ,  $A=1$ ,  $Bi_1=2$ ,  $Bi_2=20$ ,  $\delta_1=0.2$  y  $\delta_2=0.1$ .

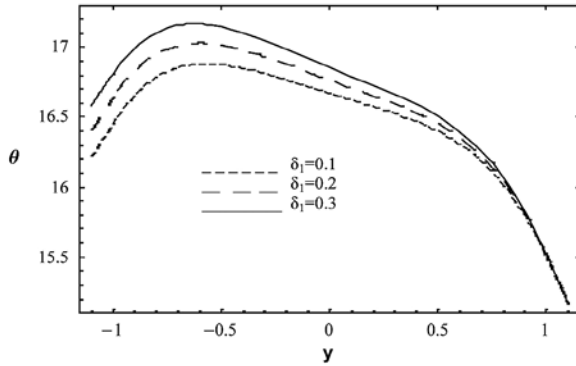


FIGURA 3

Perfil de temperatura para diferentes relaciones de espesores de la pared inferior respecto a la del fluido,  $Pe=0.1, A=1, \gamma_1=\gamma_2=1, Bi_1=2, Bi_2=20$  y  $\delta_2=0.1$ .

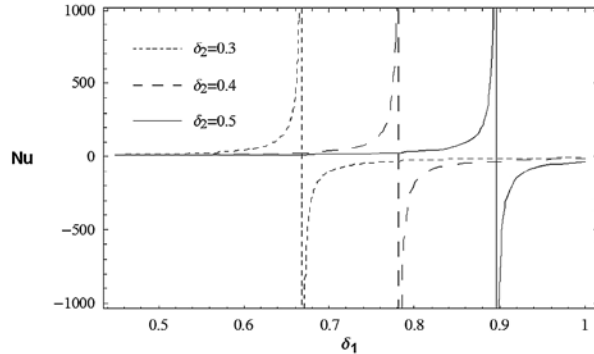


FIGURA 4

Número de Nusselt como función de  $\delta_1$  para diferentes valores de  $\delta_2$ .  $Pe=0.4, A=4, \gamma_1=\gamma_2=2$  y  $Bi_1=Bi_2=3$ .

### CONCLUSIONES

Se resuelve el problema de transferencia de calor conjugado para el flujo de un fluido viscoso entre dos planos paralelos infinitos de espesor finito. A medida que aumenta la conductividad térmica de las paredes y el número adimensional de Biot, disminuye la temperatura del sistema debido al aumento del flujo de calor que pasa del sistema al medio. Cuando aumenta el espesor de las paredes el paso de energía en forma de calor desde el sistema al medio disminuye y esto provoca que la temperatura aumente.

Además, al relacionar el número de Nusselt con la conductividad térmica de la pared inferior, para tres valores diferentes de la conductividad térmica de la pared superior, se encontró un comportamiento monótono de Nusselt a medida que aumenta hasta alcanzar un valor límite. Este valor límite se determinó analíticamente y se comprobó que al aumentar la conductividad térmica de la pared superior, el valor límite que alcanza el número de Nusselt disminuye. Este resultado es de importancia para el diseño de sistemas de transferencia de calor.

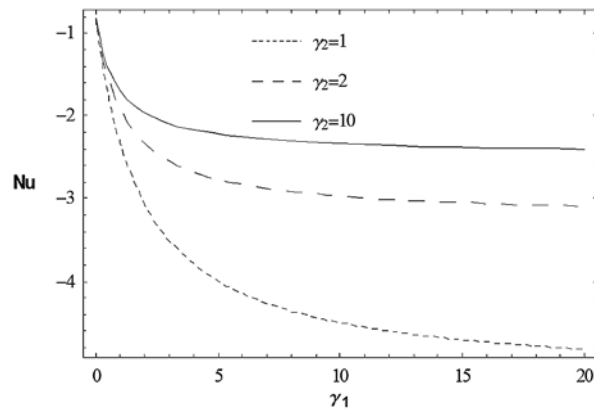


FIGURA 5

Número de Nusselt como función de  $\gamma_1$  para diferentes valores de  $\gamma_2$ .  $Pe=0.4, A=0.4, Bi_1=Bi_2=5$  y  $\delta_1=\delta_2=0.1$ .

**LITERATURA CITADA**

**POTTER M., C. Y C. D. WIGGERT, 2007.** *Mecánica de fluidos*, 3ra. Edición, Thomson Learning, México.

**MANRÍQUEZ J. A., 2005.** *Transferencia de Calor*, 2da. Edición, Alfaomega, México.

**KREITH F. Y S. M. BOHN, 2001.** *Principios de Transferencia de calor*, 6ta. Edición, Thomson Learning, México.

**ÇENGEL Y. A., 2004.** *Transferencia de calor*, 2da. Edición, Mc Graw Hill, México.

**IBÁÑEZ, G. Y S. CUEVAS, 2010.** Entropy generation minimization of a MHD (magnetohydrodynamic) flow in a microchannel. *Energy* 35: 4149-4155.

**BEJAN, A., 1996.** *Entropy Generation Minimization*. CRC Press, Florida.